UNIVERSIDAD
NACIONAL
DE MORENO

Taller de
Resolución de Problemas

COPRUN 2026

Curso de Orientación y Preparación Universitaria

Taller de
Resolución de Problemas

COPRUN 2026

Curso de Orientación y Preparación Universitaria

UNIVERSIDAD NACIONAL DE MORENO

Rector
Alejandro L. ROBBA

Vicerrectora
Patricia E. ROSEMBERG

Secretaría Académica
Roxana S. CARELLI

Secretaría de Ciencia y Tecnología
Adriana M. del H. SÁNCHEZ

Secretaría de Extensión Universitaria
Esteban SANCHEZ

Secretaría de Administración
M. Florencia GOSPARINI

Secretaría Legal y Técnica
Guillermo E. CONY

Secretaría de Tecnología de la Información y Comunicación
Claudio F. CELENZA

Secretaría de Relaciones Internacionales e Institucionales
Marcelo A. MONZÓN

CONSEJO SUPERIOR
Autoridades
Alejandro L. ROBBA (Presidente)
Patricia E. ROSEMBERG
M. Liliana TARAMASSO
Alejandro A. OTERO
J. Martín ETCHEVERRY

Consejeros
Claustro docente:
Marcela BASTERRECHEA
H. Roberto DE ROSE
Juana FERREYRO
Alejandro BARRIOS

Claustro estudiantil:
Miguel A. UREÑA
Luana M. GERVASONI

Claustro nodocente:
Antonella MONTELPARE

DEPARTAMENTO DE CIENCIAS APLICADAS Y TECNOLOGÍA

Directora - Decana
M. Liliana TARAMASSO

Coordinador - Vicedecano de la Carrera
Ingeniería en Electrónica
Gabriel F. C. VENTURINO

Coordinadora - Vicedecana de la Carrera
Licenciatura en Gestión Ambiental
Marcela A. ÁLVAREZ

Coordinador - Vicedecano de la Carrera
Arquitectura
Homero PELLICER

Coordinador - Vicedecano de la Carrera
Licenciatura en Biotecnología
Fernando C. RAIBENBERG

Coordinadora - Vicedecana del Área de Diseño
N. Marianela JAUREGUI

DEPARTAMENTO DE CIENCIAS ECONÓMICAS Y JURÍDICA

Director - Decano
Alejandro A. OTERO

Coordinadora - Vicedecana de la Carrera
Licenciatura en Relaciones del Trabajo
Lara E. YEPES

Coordinador - Vicedecano de la Carrera
Licenciatura en Administración
Lucas A. RAGO

Coordinador - Vicedecano de la Carrera
Licenciatura en Economía
Agustín Á. MARIO

Coordinador - Vicedecano de la Carrera
Contador Público Nacional
Marcelo Alejandro CAFFERATA FERRI

Coordinador - Vicedecano de la Carrera de
Abogacía
Guillermo E. CONY

DEPARTAMENTO DE HUMANIDADES Y CIENCIAS SOCIALES

Director - Decano
Juan M. ETCHEVERRY

Coordinadora - Vicedecana de la Carrera Licenciatura en Trabajo Social
M. Fernanda GÓMEZ

Coordinador - Vicedecano de la Carrera Licenciatura en Comunicación Social
L. Alejandro CÁNEPA

Coordinador-Vicedecano del Área de Educación
Fabián R. OTERO

Taller de Resolución de Problemas : COPRUN / Pablo Coll ; Fernando Chorny. - 1a ed. - Moreno : UNM Editora, 2026.
Libro digital, PDF - (Biblioteca COPRUN)
Archivo Digital: descarga y online
ISBN 978-987-782-106-2
1. Educación Universitaria. 2. Matemática. I. Chorny, Fernando II. Título
CDD 378

Colección: Biblioteca COPRUN
Directora: Lorena DEMITRIO
Autores: Pablo E. COLL y Fernando CHORNY

Colaboración de Yael M. DEZI (Revisión desde perspectiva de género)

Las imágenes que integran esta publicación son de uso libre o pertenecen a los autores

1a Edición UNM Editora, 2026
UNM Editora, 2025
Av. Bartolomé Mitre N.° 1891, Moreno (B1744OHC), provincia de Buenos Aires, Argentina
Teléfonos: 0237 460-9300 (líneas rotativas)
011 2078-9170 (líneas rotativas)
Interno: 3154
unmeditora@unm.edu.ar
www.unmeditora.unm.edu.ar
Facebook: UNM Editora

ISBN (versión digital): 978-987-782-106-2

La edición en formato digital de esta obra se encuentra disponible en: http://www.unmeditora.unm.edu.ar

Libro de edición argentina.

Queda hecho el depósito que marca la ley 11.723.

MATERIAL DE DISTRIBUCIÓN GRATUITA

REUN
RED DE EDITORIALES DE UNIVERSIDADES NACIONALES

UNM editora
UNIVERSIDAD NACIONAL DE MORENO

LUA
Libro Universitario Argentino

PRESENTACIÓN

La Universidad Nacional de Moreno (UNM), creada en el año 2010, tiene como propósito promover la generación y transmisión de conocimientos, entendiendo el acceso a la Educación Superior como un derecho humano universal.

En este marco, la UNM ha elaborado el presente material didáctico para ser utilizado en el Curso de Orientación y Preparación Universitaria (COPRUN), y lo distribuye en forma gratuita, a fin de facilitar a sus ingresantes el material de estudio necesario para esta primera etapa.

El COPRUN es la puerta de acceso a la vida universitaria y su finalidad es acompañar a los ingresantes, brindarles herramientas y metodologías de trabajo que les permitan no solo acceder sino también permanecer en la Universidad. Pretende, asimismo, desarrollar la capacidad de interpretar y comunicar información, razonar creativamente, resolver problemas. En síntesis, generar confianza en las capacidades propias y dar instrumentos para que los alumnos puedan abordar y sortear las dificultades del aprendizaje universitario.

El actual Curso, aprobado por Resolución UNM-CS Nº 450/18, contempla mecanismos de evaluación basados en la asistencia y en el cumplimiento de las actividades prácticas señaladas por los docentes, y está compuesto por tres talleres: Taller de Resolución de Problemas, Taller de Lectura y Escritura Académicas y Taller de Ciencias; y el Seminario “Aproximación a la Vida Universitaria”.

El Taller de Resolución de Problemas presenta las modalidades de la construcción del conocimiento desde la lógica formal. El Taller de Lectura y Escritura Académicas aborda el desarrollo de habilidades de comprensión, comunicación y producción escrita. El Taller de Ciencias acerca a los alumnos a los principales métodos y conceptos que se ponen en juego en la producción del conocimiento científico. El Seminario “Aproximación a la vida universitaria” apunta a crear el oficio de estudiante universitario a partir de encuentros de intercambio con docentes, no docentes y otros actores institucionales.

Quienes hacemos la UNM les damos la bienvenida a esta comunidad educativa! La presente edición fue coordinada por la Dirección de Articulación, Orientación e Ingreso, a cargo de a Lic. Lorena Demitrio.

Roxana S. Carelli
Secretaria Académica

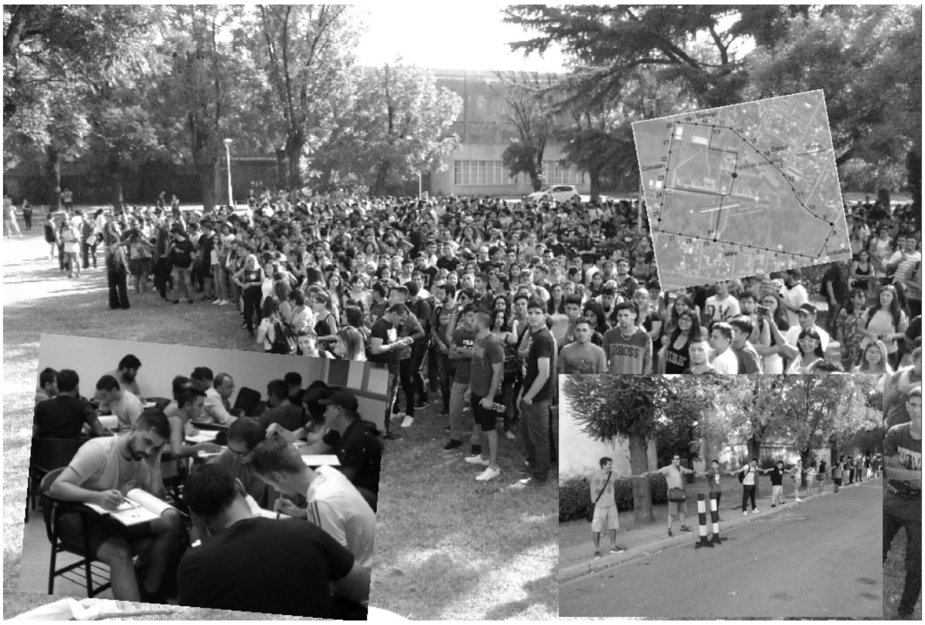
Índice general

Introducción

Estimados y estimadas estudiantes

Bienvenidos/as a la Universidad.

Bienvenidos/as a una etapa de formación y de trabajo intelectual, que esperamos les resulte enriquecedora.



La mayoría de los ciclos de preparación universitaria cuentan con alguna propuesta en el área de matemática. Suele preguntarse por qué puede ser importante aprender matemática. Y también por qué hacerlo en un **Taller de Resolución de Problemas**. ¿Qué es un taller? ¿En qué se diferencia de otro tipo de propuesta?

Veamos... La matemática es una de las maneras que tenemos de organizar nuestro pensamiento y de describir, analizar y resolver situaciones de tipos muy diversos. No es la única manera. Pero es suficientemente importante como para poder afirmar que si una persona ha desarrollado su pensamiento matemático está posicionada con más recursos para interactuar con la realidad.

La adquisición y el manejo de recursos para pensar matemáticamente y resolver problemas es un aspecto importante del perfil de cualquier estudiante universitario/a y ésta es la razón por la que el TRP se destina a todas las personas que ingresan.

La propuesta de taller se caracteriza por ser una modalidad en la que se espera que ustedes estén participando en forma activa. No vendrán a sentarse en silencio. No habrá un profesor o una profesora que explica mientras ustedes escuchan. Estarán convocados/as a *hacer*. Se recurrirá a los conocimientos que traigan de su paso por la escuela, como así también de su experiencia cotidiana y se les brindará orientación para que puedan recuperar los que tengan olvidados y necesiten para el cursado de las carreras. Se encontrarán con docentes que les propondrán preguntas y problemas; que intervendrán —si es necesario— para ayudarlos a que comprendan en qué consiste el problema. En general no les darán respuestas, sino que les devolverán las preguntas y ustedes tendrán que volver a los problemas con esas nuevas preguntas para repensarlos, ajustar las primeras aproximaciones o cambiar el enfoque, renovar el agua del mate y comenzar otra vez.

Será imprescindible aprender a trabajar en grupo con otros compañeros y compañeras. Sus docentes ayudarán a que puedan reunirse, vincularse, debatir, pensar colaborativamente. Aprendemos cuando otro compañero o compañera nos explica y aprendemos también cuando nos toca explicarle a alguien más.

Esperamos que la propuesta del **Taller de Resolución de Problemas** les resulte atractiva y desafiante. Tienen permiso y libertad para probar y equivocarse al pensar las soluciones a los problemas propuestos. En un taller se hacen intentos, se practica, se experimenta. Pondremos el foco en los intentos de resolución de los problemas. Les enseñaremos una variedad de recursos posibles para aprender a pensarlos y evaluaremos cómo los ponen en juego, aunque muchas veces puedan no resultarles suficientes para obtener soluciones definitivas y completas. Valen todos los intentos. Incluso proponer soluciones aunque crean que pueden no ser correctas. Descubrir un error en una solución es también una manera de comprender mejor el problema.

¡Bienvenidos/as a la oportunidad de un encuentro amistoso con la matemática!

Estructura del cuadernillo

El cuadernillo que reciben será la guía de todo el desarrollo del TRP. Se compone de una selección de problemas, organizados en Clases: Clase 1, Clase 2,. . . . Los títulos de las Clases figuran en el índice y se corresponden con los temas que irán abordando cada día: Empezando a hacer matemática, ¿Qué es un problema?, etc.

Cada clase tiene una sección denominada **Problemas para la clase**, que son los que guiarán el trabajo en el aula, con su docente y sus compañeros/as, y otra sección denominada **Ejercicios para practicar** que están pensados para completar el trabajo cuando estudien fuera del horario del taller (aunque en algún caso su docente les podrá indicar que resuelvan alguno de esos ejercicios durante la clase). La diferencia entre los que llamamos *Problema* y *Ejercicio* es bastante subjetiva y se podría decir mucho acerca de este tema. En líneas generales, ante un problema no se sabe de antemano qué hacer: hay que releerlo, interpretarlo, planear una estrategia. Es más indirecto. Un ejercicio, en cambio, es una práctica de algún procedimiento que ya se aprendió antes y tiene por objetivo entrenar ciertas habilidades. Por supuesto, lo que para una persona puede resultar un ejercicio para otra puede ser un problema, porque estas definiciones que estamos intentando establecer dependen de cada experiencia individual. Por eso la diferencia entre Problema y Ejercicio es difusa, es solo una manera de organizar las actividades en el cuadernillo y no es tan importante como para prestarle demasiada atención.

Lo que sí podemos decir, es que en la sección de Problemas se trabajará resolviendo problems variados, sin detenerse mucho a trabajar sobre la enseñanza de contenidos matemáticos para resolverlos. En esta parte central de la clase trabajaremos sobre los *quehaceres matemáticos*: el tipo de prácticas que te servirán para *intentar resolver* los problemas. En cambio, como los problemas se referirán a contenidos matemáticos, la parte de Ejercicios estará más destinada a aprender (o recordar de la escuela) los contenidos matemáticos que seguramente te vendrían bien para llegar más a fondo en la resolución de los problemas. Cuando estés trabajando con los problemas irás identificando temas de la escuela que necesitás repasar o comprender. En general, muchos de esos temas tendrás oportunidad de revisarlos en la sección de Ejercicios.

Hay estudiantes que ingresaron en años anteriores a nuestra universidad ya han descubierto el enorme valor que tiene reunirse a estudiar en grupo. Estudiando con compañeros y compañeras se tiene siempre tiene a quién recurrir cuando algo no se comprende. Es un aprendizaje para quien recibe una explicación de un par como para el que debe esforzarse en dar una explicación que sea comprendida. Tenemos una Biblioteca con una generosa variedad de libros, con mesas amplias en las que pueden sentarse varios compañeros y compañeras juntos y atendida por profesionales muy capaces y con gran voluntad de ayudar.

Hábitos de estudio

Parte de la preparación universitaria que el COPRUN les quiere brindar es que se vayan acostumbrando a estudiar por su cuenta. Los/as docentes irán dando pautas. Pero muy de a poco —tal vez a lo largo de todo el primer año de carrera— irán notando que cada vez son menos las pautas de los/as docentes y cada vez más serán ustedes mismos los que necesitarán ir dándose cuenta de que necesitan estudiar para llevar las materias al día. Son dos aprendizajes necesarios: aprender las materias y aprender a estudiar las materias. Esa práctica ya comienza en el COPRUN.

Hay algunas preguntas que pueden acompañar este aprendizaje:

- ¿Tengo la sensación de que comprendí?

- ¿Consigo separar partes de la clase que comprendí de otras que no?
- ¿Me doy cuenta de qué recursos me ayudan a comprender?
  - Intervenciones del/la docente.
  - Explicaciones de mis compañeros.
  - Mis propios apuntes de la clase.
  - Los apuntes de otra persona.
  - Un libro.
  - Una página de Internet.
  - Un gráfico.
  - Un ejemplo.
  - Un video.
  - Un diálogo con una IA.
- ¿Soy capaz de procurarme yo mismo esos recursos?

La reflexión sobre este tipo de preguntas tiene que ver con aprender a estudiar. Con aprender a conocerse a uno/a mismo/a como estudiante y aprender a tomar las decisiones que más le convienen a uno/a para aprender.

Confiamos en que ustedes mismos/as, con la ayuda de sus docentes y de sus propios compañeros/as, irán transitando este camino.

Clase 1. Empezando a hacer matemática

1.1. Problemas para la clase

Problema 1. [Problema del cartero]

(a) Esta actividad se realizará en parejas. Cada pareja accederá al siguiente enlace (se puede seguir el enlace o copiarlo en un navegador): https://www.geogebra.org/m/rpv6hapy. El/la docente le dará a cada pareja una contraseña que le permitirá ver una figura en el celular. En una hoja que puedan sacar del cuaderno cada pareja debe escribir una descripción de la figura que ve, para que otra pareja del aula, leyendo la descripción, pueda reproducirla. La descripción solo puede tener texto escrito (letras y/o números). Pero no puede haber ningún tipo de dibujo o información gráfica.

(b) Una vez escritas las instrucciones, las intercambiarán con alguna pareja del aula que su docente les indicará. Intenten dibujar la figura que corresponde a la descripción recibida. No está permitido pedir más información ni preguntarle nada a la pareja que redactó las instrucciones.

(c) Cuando hayan terminado de dibujar, su docente les indicará de qué manera pueden comparar la reproducción que hayan elaborado con la figura original. Escriban un pequeño informe con estos detalles:

- Aspectos que salieron bien y aspectos que no.
- Problemas en la redacción de las instrucciones o en la interpretación de las mismas. Los detalles de esta discusión serán compartidos luego en un debate de toda la clase, moderado por el/la docente.

Problema 2. [Un cartero con recursos]

(a) Realicen la construcción que se describe en la siguiente secuencia de instrucciones. Si no conocen el significado de alguna palabra, búsquenlo en Internet o pregunten a su docente:

(i) En un sistema de coordenadas cartesiano (ejes x e y) ubiquen los puntos: $A = (0, 0)$, $B = (2, 0)$, $C = (2, 2)$ y $D = (0, 2)$.

(ii) Tracen los segmentos AB, BC, CD y AD.

(iii) Tracen los segmentos AC, BD.

(iv) Llamen P al punto en el que se cortan los dos segmentos trazados en el paso (iii).

(v) Llamen Q al punto medio del segmento BC.

(vi) Tracen el segmento PQ.

(b) Con el recurso para describir figuras mostrado en la parte (a) de este problema, repitan el trabajo realizado en el Problema 1 trabajando en las mismas parejas, con una nueva figura. Su docente les dará una nueva clave para acceder a esta figura.

1.2. Ejercicios para practicar

Para practicar el uso de coordenadas

Ejercicio 1. [Ubicar puntos]

(a) Ubicá los siguientes puntos en el plano cartesiano y calculá el área de la figura formada si unimos todos los puntos mediante segmentos de recta, siguiendo el orden $ABCDA$.

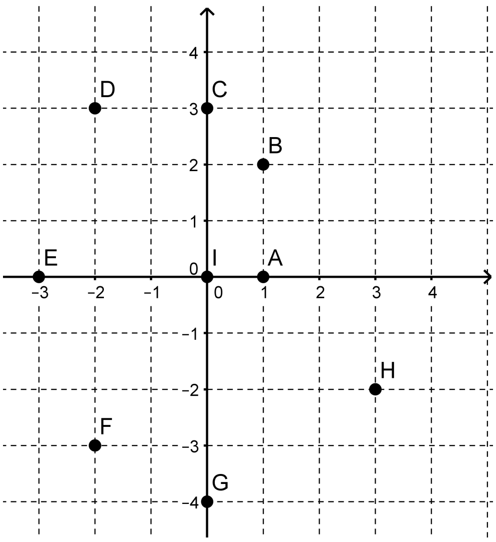
a) $A = (1, 4)$ *b*) $B = (1, 7)$

c) $C = (5, 7)$ *d*) $D = (5, 4)$

(b) ¿Qué pasaría si en lugar de marcar el punto $(5, 4)$ marcamos el punto $(5, 1)$? ¿Qué figura queda formada? ¿Podemos calcular el área de la nueva figura? Si lo considerás posible, calculá el área.

Ejercicio 2. [Leer coordenadas]

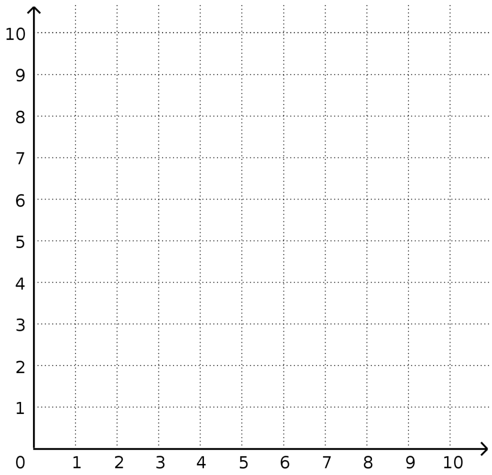
En la figura se muestra un plano cartesiano y en él están marcados algunos puntos. ¿Cuáles son las coordenadas x e y de cada uno de los puntos?



Ejercicio 3. [Puntos para el ejercicio 4]

Ubiquen en el plano los siguientes puntos. Serán necesarios para resolver el **Ejercicio** 4

$A = (1,1)$
$B = (5,1)$
$C = (5,4)$
$D = (1,4)$
$E = (7,3)$
$F = (8,1)$
$G = (10,3)$
$H = (1,6)$
$I = (5,9)$
$J = (8,5)$
$K = (6,6)$
$L = (1,5)$
$M = (5,5)$



Para interpretar definiciones

Ejercicio 4. [Algunos cuadriláteros] Para usar terminología espécifica, comprender y hacernos comprender por los demás tenemos que estar de acuerdo en el significado de las palabras que designan los conceptos matemáticos. En matemática eso se hace estableciendo definiciones.

(a) Lean las siguientes definiciones. Luego, para interpretarlas, observen los puntos A, B, $\ldots M$ que ubicaron en el **Ejercicio** 3 completen con V (verdadero) o F (falso) las afirmaciones que vienen a continuación:

- **Definición:** Llamamos **rectángulo** a un cuadrilátero que tiene sus cuatro ángulos rectos[1].
- **Definición:** Llamamos **rombo** a un cuadrilátero que tiene sus cuatro lados iguales.
- **Definición:** Llamamos **cuadrado** a un cuadrilátero que tiene sus cuatro lados iguales y sus cuatro ángulos rectos.

(i) $ABCD$ es un rectángulo
(ii) $ABCD$ es un cuadrado
(iii) $ABCD$ es un rombo
(iv) $ABML$ es un rectángulo
(v) $ABML$ es un cuadrado
(vi) $ABML$ es un rombo
(vii) $BFGE$ es un rectángulo
(viii) $BFGE$ es un cuadrado
(ix) $BFGE$ es un rombo
(x) $AMIH$ es un rectángulo
(xi) $AMIH$ es un cuadrado
(xii) $AMIH$ es un rombo
(xiii) $EJKC$ es un rectángulo
(xiv) $EJKC$ es un cuadrado
(xv) $EJKC$ es un rombo
(xvi) $EJKC$ es un rectángulo

[1]Claro: para entender esta definición, hay que saber qué es un cuadrilátero, que es un ángulo y qué es un ángulo recto. Un cuadrilátero es un polígono de cuatro lados. Para enteneder esto hay que saber qué es un polígono y qué es un lado. Este juego podría no terminar nunca. Pero lo mismo te puede pasar si buscás una palabra castellana en el diccionario. Qué significa “aldaba”. El diccionario dice: Aldaba: Pieza de hierro o bronce que se pone a las puertas para llamar golpeando con ella. Si alguien no sabe qué es el hierro, o qué es el bronce, o qué es una puerta, tampoco puede entender qué es una aldaba. Cada uno/a de ustedes tendrá que ocuparse de averiguar por su cuenta qué es el bronce, qué es una puerta, qué es un polígono o qué es un ángulo, según corresponda y necesite, para llegar a comprender las definiciones que utilicemos. Todos y todas sabemos e ignoramos distintas cosas. Por eso cada cual debe ir armando su camino. Internet ayuda. . .

(b) Controlen sus respuestas con las de otro compañero. En aquellas en que no estén de acuerdo, cada uno intente convencer al otro con argumentos.

Para interpretar instrucciones

Ejercicio 5. [Rectángulos y diagonales] Realicen la construcción respetando en orden los pasos indicados:

(a) Definan un punto A cualquiera, inventando sus coordenadas.

(b) Definan, dando sus coordenadas, puntos B, C y D, de manera que $ABCD$ sea un rectángulo con un lado que mida 3 unidades y otro que mida 4 unidades.

(c) Tracen las diagonales del rectángulo.

(d) Escriban las coordenadas del punto E donde se cruzan las dos diagonales.

(e) Calculen el área del rectángulo $ABCD$.

Ejercicio 6. [Rectángulos de igual área]

(a) Construyan un nuevo rectángulo que cumpla las siguientes condiciones:

- El único vértice en común con el rectángulo del **Ejercicio** 5 sea el punto A.
- El área sea igual a la de $ABCD$.

(b) Escriban las coordenadas de los vértices del nuevo rectángulo.

1.3. Vademecum Matematicæ

Esta sección será elaborada por ustedes mismos/as, como parte del registro de lo que suceda en las clases. Es el lugar adecuado para incluir definiciones, explicaciones, ejemplos, descripción de procedimientos.

La construiremos colaborativamente a lo largo del taller, en un documento colaborativo que tendrá la siguiente estructura:

```
# CLASE_[NÚMERO]_[FECHA]

## PROBLEMA
[texto]

## CONCEPTOS_IDENTIFICADOS
- concepto_1
```

```
- concepto_2

## DEFINICIONES
### concepto_1
[definición]

### concepto_2
[definición]

## PROCEDIMIENTOS
### concepto_1
[explicación]

## EJEMPLOS
### ejemplo_1
[descripción]

## QUEHACERES MATEMÁTICOS
### ejemplo_1
[descripción]

## PARTICIPARON
[ponen su nombre y apellido]
```

Clase 2. ¿Qué es un problema?

2.1. Problemas para la clase

Problema 3. [Cara limpia, cara sucia] Dos hermanos estaban limpiando el galponcito del jardín. Al terminar, posiblemente a causa de las tareas que cada uno estuvo realizando, uno de ellos terminó con la cara sucia y el otro no. Sin embargo, el que tenía la cara limpia se lavó la cara y el que la tenía sucia no se la lavó. ¿Por qué?

(a) Pueden trabajar en parejas. Redacten una lista de preguntas que permitan avanzar en la investigación de este misterio, con la siguiente condición: solo están permitidas preguntas que puedan ser respondidas con “Sí” o “No”. Si alguien ya conococe la solución, o se le ocurre sin necesidad de preguntar nada, espere pacientemente (¡Sin decir nada!) y participará en la segunda parte de la actividad.

(b) En esta segunda parte su docente recibirá las preguntas y las leerá en voz alta. Si hay en el aula otras personas que creen conocer la respuesta, pueden proponerse para responder las preguntas. Su docente (que conoce la respuesta) irá confirmando si están guiando bien a sus compañeros/as con las respuestas.

Problema 4. [¿Son problemas?]

(a) Discutan de cuáles de las siguientes situaciones dirían que son un problema matemático [1].

   (i) En mis vacaciones del año pasado llovió 9 días, y hubo 10 mañanas y 10 tardes soleadas. Cuando llovió por la mañana, la tarde fue soleada[2].

   (ii) En la estantería de un gimnasio hay mancuernas de 2 kg y de 5 kg. En total, todas las mancuernas juntas pesan 90 kg.

   (iii) El COPRUN es el Curso de Orientación y Preparación Universitaria. Se compone del Taller de Resolución de Problemas, el Taller de Ciencias, el Taller de Lectura y Escritura Académicas y el Seminario de Ingreso a la Vida Universitaria. En 2026, se inscribieron personas 4943 que presentaron su documentación. ¿Qué significa la sigla COPRUN?

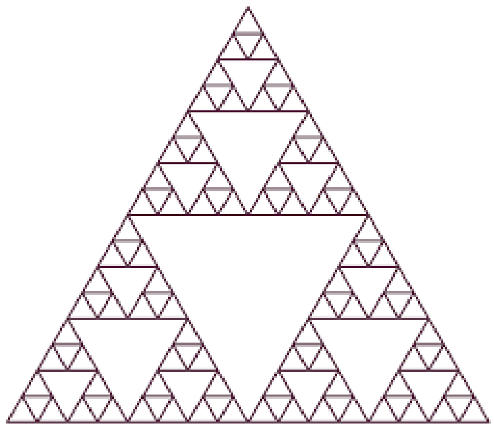
   (iv) En un estante de un gimnasio hay mancuernas de 2 kg y en otro estante hay mancuernas de 5 kg. En total, todas las mancuernas juntas pesan 60 kg. Las mancuernas del primer estante pesan juntas lo mismo que lo que pesan juntas las del segundo estante. La cuota del gimnasio es de $35000 por mes.

[1] En adelante, cada vez que digamos “problema”, estaremos refiriéndonos a “problema matemático”, salvo que lo aclaremos.
[2] Adaptado del libro Bernabeu Soria 2002.

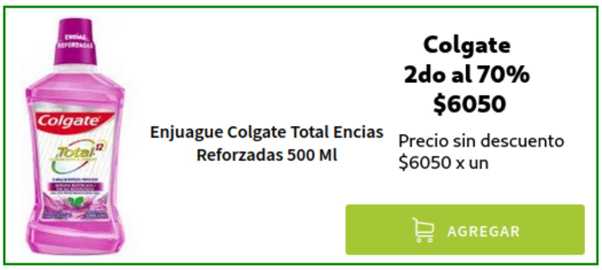
(b) Para los casos anteriores en los que hayan concluido que no se trataba de un problema, completen el enunciado de alguna manera posible para que sí lo sea.

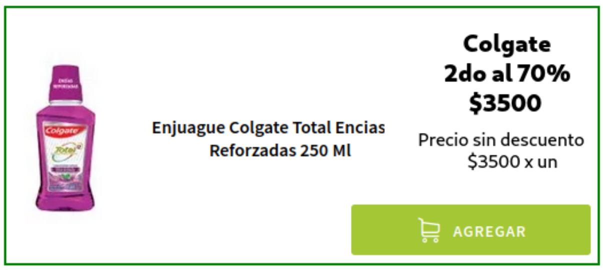
Problema 5. [Inventar un problema]

Observen la figura y redacten una pregunta basada en la misma, que resulte un problema matemático.



Problema 6. [Ofertas] En una página de venta online figuran estas dos ofertas de enjuague bucal:





(a) Redacten una pregunta que no se pueda responder con la información disponible.

(b) Redacten una pregunta que sí se pueda responder con la información disponible, pero que no constituya un problema (matemático).

(c) Redacten una pregunta que transforme la situación en un problema matemático.

2.2. Ejercicios para practicar

Ejercicio 7. [Cálculo de porcentajes]

(a) ¿Cuánto es el $15\,\%$ de 730? Escribí una cuenta en un renglón que permita averiguarlo.

(b) ¿Cuánto es el $115\,\%$ de 730? Escribí una cuenta en un renglón que permita averiguarlo.

(c) Escriban una secuencia de teclas de la calculadora para obtener cada uno de los porcentajes de los ítems anteriores.

Ejercicio 8. [Cálculo de incrementos] Un producto con precio de lista de $\$4500$ sufrió un aumento del $18\,\%$.

(a) ¿Cuánto terminó costando?

(b) Escriban una secuencia de teclas de la calculadora para obtener ese precio final. Está permitido usar la tecla $\boxed{=}$ una sola vez.

(c) Escriban una secuencia de teclas de la calculadora para obtener ese precio final. Está permitido usar la tecla $\boxed{=}$ una sola vez y una sola vez una de las teclas con las operaciones básicas ($+$, $-$, $\times$, $/$). Si la secuencia propuesta en el ítem anterior ya cumplía estas condiciones, ceben un mate.

Ejercicio 9. [Cálculo de descuentos] Resuelvan otra vez el **Ejercicio** 8, pero considerando que el producto de $\$4500$ tuvo un descuento del $18\,\%$.

Ejercicio 10. [¿Qué porcentaje?]

(a) La línea de colectivos 654 observó que de un mes a otro pasó de tranportar 10800 pasajeros por día a transportar solo 8900. ¿Qué porcentaje de pasajeros perdió?

(b) Todos los pasajeros que dejaron de viajar en la línea 654 se pasaron a la línea 456, que les servía porque hacía un recorrido similar y los coches no iban tan llenos. Esa línea solía transportar apenas 7200 pasajeros por día. ¿Qué porcentaje de pasajeros ganó la línea 456?

(c) Reescriban los enunciados (a) y (b) en una versión lo más corta que puedan, de manera que para resolverlos haya que hacer los mismos cálculos, pero sin mencionar nada acerca de las líneas de colectivos y los pasajeros.

Ejercicio 11. [Videojuego en cuotas] Johana se quiere comprar un videojuego. Si lo paga en efectivo, le descuentan un 20 % del precio de lista. Si lo paga en 12 cuotas le recargan un 10 % sobre el precio de lista. Si en efectivo le sale 12000 pesos, ¿de cuánto será cada cuota?

Ejercicio 12. [Libro con descuento] Fui a comprar a una librería un libro de matemática. El vendedor me dijo que por estar en oferta me hacen el 15 % de descuento, pero que han de cargarme el 6 % por cierto impuesto que afecta a todos los artículos. ¿Qué me conviene más, que primero me hagan el descuento y luego me carguen el impuesto o que primero me carguen el impuesto y después me hagan el descuento?

Ejercicio 13. [Descuento para jubilados/as] En un supermercado hacen los días miércoles el 10 % de descuento en todos los artículos, más el 5 % para jubilados/as. Eso significa que se descuenta el 5 % de lo que queda tras haber descontado el 10 %.

Los días jueves el supermercado ofrece el 15 % de descuento sobre todos sus productos, para todo el público.

Ramón es jubilado. ¿Le conviene ir a comprar el miércoles, el jueves o le da lo mismo?

Ejercicio 14. [Cálculo de porcentajes] Un supermercado tiene la oferta que se muestra en el siguiente cartel:

60 % DE DESCUENTO EN LA SEGUNDA UNIDAD EN TODOS LOS PRODUCTOS DE ALMACÉN.

Un dulce de leche de 500 g cuesta $748,25. El de la misma marca, pero de 250 g cuesta $512,50. ¿Que conviene comprar: un dulce de leche grande o dos chicos?

2.3. Vademecum Matematicæ

Ésta es la sección para que elaboren ustedes. Se repite en todas las clases y pueden consultar su estructura en la página 14.

Clase 3. Estimar y calcular

3.1. Problemas para la clase

Problema 7. [La pileta de Drácula] Realicen una estimación: ¿Cuánto debería medir la arista de un cubo capaz de contener toda la sangre de la humanidad?[1]

Problema 8. [Abrazo a la universidad] Realicen una estimación: ¿Cuánta gente haría falta para rodear, tomados de la mano, el predio de la UNM?

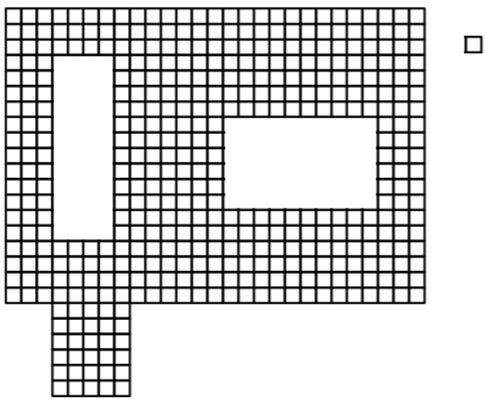
Problema 9. [Alfombrar las aulas] Realicen una estimación: ¿Cuánto costaría alfombrar todas las aulas del TRP con cartulinas rojas?

3.2. Ejercicios para practicar

Áreas

Ejercicio 15. [Contar cuadraditos 1]

¿Cuántos cuadraditos como el que se ve al costado hay en toda la figura?



(a) Estimen la cantidad. La estimación debe ser del tipo "Seguro hay más de... y menos de...", tratando de lograr un rango pequeño[2] y sin hacer cálculos detallados. Deben explicar por escrito cómo organizan la estimación.

(b) Escriban un único cálculo en un renglón que permita averiguarlo. Si el cálculo se resuelve en una calculadora, está permitido usar una sola vez el botón $\boxed{=}$.

[1] Este problema está tomado de Paenza 2005.

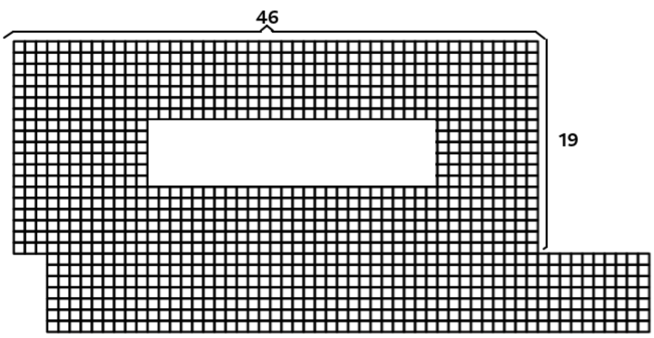
[2] Por ejemplo, no tiene ninguna utilidad decir "Seguro hay más de uno y menos de un millón". Esa estimación sería absolutamente correcta, pero absolutamente inútil.

Ejercicio 16. [Contar cuadraditos 2]

¿Cuántos cuadraditos hay en toda la figura?

(a) Estimen la cantidad con las mismas consideraciones que en el **Ejercicio** 15.

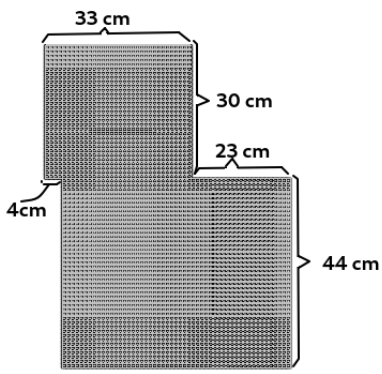
(b) Escriban un único cálculo en un renglón que permita averiguarlo. Si el cálculo se resuelve en una calculadora, está permitido usar una sola vez el botón $\boxed{=}$.



Ejercicio 17. [Contar cuadraditos 3]

(a) ¿Cuántos cuadraditos que miden 1 cm × 1 cm hay en toda la figura? Escriban un único cálculo en un renglón que permita averiguarlo. Si el cálculo se resuelve en una calculadora, está permitido usar una sola vez el botón $\boxed{=}$.

(b) ¿Cuántos cuadraditos que miden 1 mm × 1 mm hay en toda la figura?



Volúmenes

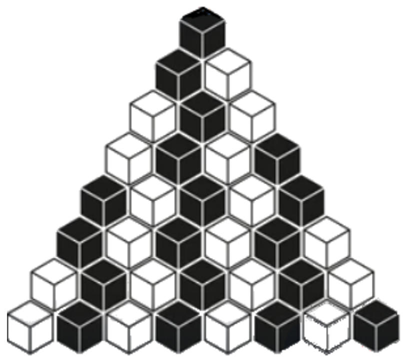
Ejercicio 18. [Contar cubitos 1]

¿Cuántos cubitos hay en total, si asumimos que los cubitos no flotan en el aire, sino que están apoyados sobre otros cubitos? Calcúlenlo con una única cuenta.

Ejercicio 19. [Contar cubitos 2]

(a) Si cada cubo pesa 180 g y asumimos que los cubitos no flotan en el aire, sino que están apoyados sobre otros cubitos, ¿cuánto pesa la pila completa?

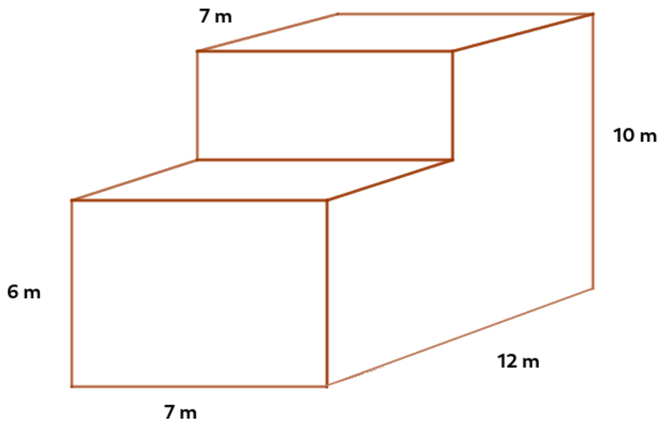
(b) Supongan que cada cubo blanco pesa 100 g y cada cubo negro pesa 180 g. Además, se sabe que todos los cubos son negros o blancos y que ningún cubo está apoyado sobre un cubo de su mismo color. ¿Cuánto pesa la pila completa?



Ejercicio 20. [Contar cubitos 3]

(a) Si un cubo de 1 m de arista cuesta $230. ¿Cuánto cuesta llenar de cubos esta caja?

(b) Si la caja pesa 2 kg y un cubito de 1 cm de arista pesa 50 g, ¿cuánto pesa la caja llena de cubitos?



3.3. Vademecum Matematicæ

Ésta es la sección para que elaboren ustedes. Se repite en todas las clases y pueden consultar su estructura en la página 14.

Clase 4. Ensayo y error. Validación

4.1. Problemas para la clase

Problema 10. [Bariló, Bariló] El hotel Altas Camas recibe contingentes de estudiantes que van de viaje de egresados/as. Tienen habitaciones para cuatro o para cinco personas. Se sabe que en Altas Camas hay 41 habitaciones y que cuando todas están completas se alojan allí 182 personas. Queremos saber cuántas habitaciones de cada tipo hay.

(a) ¿Cuál o cuáles de las siguientes son respuesas con sentido para este problema?

a) 12 habitaciones triples, 21 habitaciones de cuatro camas y 7 habitaciones de cinco.

b) 20 habitaciones de cuatro camas y 21 habitaciones de cinco.

c) Recaudará por noche 5 millones, 460 mil pesos.

d) Una cama doble y dos cuchetas.

(b) Propongan tres respuestas con sentido para el problema y luego analicen si son correctas o no. Expliquen por qué lo son o por qué no lo son.

(c) Si todavía no la encontraron, busquen la solución del problema.

Problema 11. [El rectángulo que creció] En un gran parque, una arquitecta ha delimitado un espacio rectangular para hacer una zona de juegos infantiles. Una vez trazados los límites, observa que si a cada lado del rectángulo lo aumenta en 4 m, el área del sector de juegos resulará 136 m^2 mayor. ¿Se puede saber cuánto miden los lados del rectángulo (así como lo trazó la arquitecta, antes de aumentarlo)?

(a) Decidan cuáles de las siguientes respuestas tienen sentido como para que valga la pena chequear si son correctas.

a) Un lado de 10 cm y otro lado de 25 cm.

b) Un lado de 12 m, un lado de 16 m, un lado de 14 m y un lado de 18 m.

c) Un lado de 18,5 m y un lado de 11,5 m.

d) Un lado de 19 m y un lado de 10 m.

(b) Invente distintas medidas posibles (que tenga sentido chequear) para los lados del rectángulo y luego decidan si podrían ser o no las medidas del rectángulo que trazó la arquitecta. Expliquen por qué sí o por qué no.

Problema 12. [Punto compartido] Tenemos dos listas de puntos, dados por sus coordenadas. Las listas continúan, siguiendo un patrón, pero solo vemos sus primeros puntos.

Lista 1: $(2,0), (8,5), (14,10), (20,15), (26,20)\ldots$

Lista 2: $(0,13), (5,17), (10,21), (15,25), (20,29)\ldots$

(a) Propongan un punto cuyas coordenadas sean números de tres cifras, que puedan asegurar que estará en la Lista 1, pero no estará en la Lista 2.

(b) Propongan un punto cuyas coordenadas sean números de tres cifras, que puedan asegurar que estará en la Lista 2, pero no estará en la Lista 1.

(c) Investiguen: ¿Existe algún punto que esté en las dos listas? ¿Por qué sí o por qué no?

(d) Investiguen: ¿Existen dos puntos que estén en las dos listas? ¿Por qué sí o por qué no?

4.2. Ejercicios para practicar

Ejercicio 21. [Ecuación: evaluar soluciones candidatas] La siguiente expresión es una ecuación. Sus soluciones son los valores de x que verifican la igualdad, es decir, que al reemplazar x por un número y hacer la cuenta el resultado de la misma sea 31.

$$(x+17)(x-13)=31$$

(a) Decidan si alguna de las siguientes es una solución de la ecuación:

- $x=-5$
- $x=0$
- $x=3$
- $x=9$
- $x=14$
- $x=17$

(b) Exploren si existe más de una solución para esta ecuación[1].

Ejercicio 22. [Otra ecuación]

$$\frac{x^2+1}{x-1}+\frac{8}{x+1}=7$$

Decidan si alguno de los valores de x propuestos es solución de la ecuación.

- $x=-5$
- $x=0$
- $x=3$
- $x=9$
- $x=14$
- $x=17$

[1] Muchas ecuaciones, como ésta, se pueden resolver de manera sistemática. Si en la escuela aprendiste a resolver una ecuación así, también podés intentarlo. Acá en el taller no nos estamos proponiendo enseñarte métodos para resolver ecuaciones, sino que estamos usando las ecuaciones como excusa para aprender resolver un problema por tanteo. Por supuesto, este ejercicio es muy distinto para alguien que conoce un método de resolución que para alguien que no lo conoce.

Ejercicio 23. [Pocos pasos] Consideren la siguiente ecuación:

$$x^3 - 13x^2 - 370x - 1400 = 0$$

Se sabe que hay una solución en esta lista:

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50.

El desafío es encontrar la solución en la menor cantidad posible de intentos usando solamente una calculadora no científica: sumar, restar, multiplicar y dividir (si tienen las funciones "elevar al cubo" y "elevar al cuadrado", también vale usarlas, para escribir menos). Desde luego, es una ecuación que muchas aplicaciones o una IA puede resolver en un instante. Pero acá el objetivo no es conocer la solución, sino ensayar estrategias para encontrarla, con las reglas del juego propuestas.

4.3. Vademecum Matematicæ

Ésta es la sección para que elaboren ustedes. Se repite en todas las clases y pueden consultar su estructura en la página 14.

Clase 5. Trabajo Práctico 1 (TP1)

En esta clase se desarrollará el Trabajo Práctico 1 (TP1). El TP es presencial e individual. Es importante asistir y resolverlo con compromiso. Tu producción en la resolución tiene que mostrar el proceso que venís haciendo en el taller. No vamos a evaluar la obtención de soluciones completas o de respuestas correctas. Lo que tu docente mirará cuando lea tu trabajo será:

- Que hayas comprendido lo que se pide resolver. Para eso podés explicar con tus palabras en qué consiste el problema. Podés mostrar soluciones incorrectas y explicar por qué no son correctas (en qué fallan, que aspecto del problema no resuelven). Podés proponer un problema similar, pero más sencillo que sí sepas resolver y explicar por qué éste te resulta más difícil. Todas esas producciones son válidas y forman parte de lo que queremos que aprendas en este taller.

  Hay una gran diferencia entre no comprender en qué consiste un problema y no encontrar una solución. Los/as matemáticos/as (y los científicos y científicas en general) trabajan pensando problemas que no saben resolver.

- Que escribas con claridad tus explicaciones. Sea cuál sea el avance que logres, la comprensión de lo que escribiste no puede depender de la paciencia y la habilidad de quien lo lea. Tiene que haber una producción escrita organizada, pensando en que alguien lo va a leer y tiene que poder seguir la línea de tu pensamiento a partir de ese texto.

  Hay que escribir siempre de izquierda a derecha y de arriba a abajo. No podés agregar al comienzo de la hoja algo que descubriste después. El que lo lea lo va a encontrar antes y no va a entender cuál fue su origen.

  Los cálculos tienen que ir acompañados de pequeños textos que expliquen qué es lo que se busca calcular con ellos. Podés agregar diagramas, gráficos, ejemplos, etc.

- Inclusive las soluciones correctas y completas tienen que estar explicadas. Si elaborás toda una cadena de razonamientos y cálculos mentales, pero terminás escribiendo como respuesta: “470 pesos” y nada más, no hay manera de que tu docente pueda evaluar cuánto aprendiste o cómo fue tu comprensión. Podés trabajar en hojas borrador y luego presentar de manera ordenada lo que pudiste elaborar. Pero entregá también la hoja borrador (indicando que lo es). Puede dar cuenta también de tu trabajo durante ese tiempo y ayudar a tu docente a saber cómo viene tu proceso de aprendizaje.

- A lo largo de las clases estuvimos nombrando y practicando distintos quehaceres matemáticos. No todos conducen siempre a resolver todos los problemas. Pero son maneras de intentar. Se esperará en el TP que puedas hacer matemática a través de la puesta en práctica de esos quehaceres. Es lo que llamamos IVR (Intento Válido de Resolución).

Clase 6. Exploración del espacio de soluciones

6.1. Problemas para la clase

Problema 13. [La alcancía de Lucía] Año 1926. En la pieza de un conventillo del barrio de Balvanera donde vive, Lucía abre su alcancía y encuentra que contiene monedas de 10, 20 y 50 centavos. No se sorprende porque ella las fue ahorrando. Al contarlas, descubre que tiene exactamente 22 monedas que en total suman 5 pesos. ¿De cuántas maneras distintas puede estar compuesta esta combinación de monedas que había ahorrado Lucía?

Problema 14. [La habitación de Lucio] Lucio está encargado de comprar las baldosas para hacer los pisos de las salas de conferencias de un centro de convenciones que se está construyendo. La arquitecta, que es aficionada a los acertijos, le da a Lucio la siguiente información con la que Lucio tiene que reconstruir cuántas salas de conferencias tiene el centro de convenciones y así poder calcular cuántas baldosas necesita, para no comprar de menos ni de más.

(i) Todas las salas tienen una área de $18m^2$.

(ii) El perímetro de todas las salas es de $18m$.

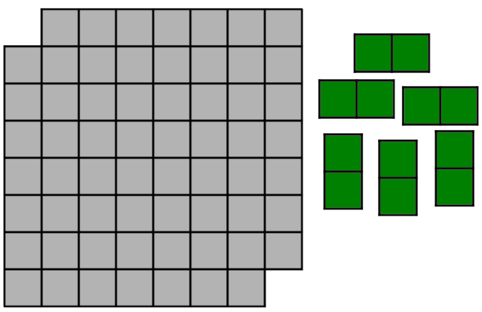
(iii) Las paredes forman angulos entre sí de 90 o 270 grados.

(iv) Los tramos de pared rectas miden un número entero de metros.

Tienen que reconstruir la forma de todas las salas de conferencias del centro de convenciones.

Problema 15. [El tablero truncado]

Al siguiente tablero le faltan las esquinas. Cada ficha de dominó, como las que se ven al costado del tablero, ocupa exactamente dos casillas del mismo. Se supone que disponemos de todas las fichas que necesitemos. ¿Es posible cubrir todo el tablero con fichas (horizontales o verticales), sin que ninguna se superponga con otra ni quede asomando hacia el exterior del tablero?



Problema 16. [Cara limpia, cara sucia: segunda parte]

Recuerden el **Problema** 3 de la página 16. Supongan que en vez de dos hermanos limpiando el galponcito del jardín, había más. No tienen por qué ser hermanos. Puede ser cualquier cantidad de gente. Al terminar, todas las personas que hayan participado tendrán la cara sucia o bien la cara limpia.

Conociendo la solución del **Problema** 3, expliquen qué haría cada persona con su propia cara, según lo que vea en la cara de las demás. Describan la mayor variedad de casos distintos, ejemplificando con distintas cantidades de personas y explicando en cada caso la conducta de cada una (lavarse o no lavarse la cara).

Organicen los distintos casos de una manera ordenada y sistemática, tratando de abarcar todos los casos posibles y explicando cuáles son esencialmente iguales entre sí.

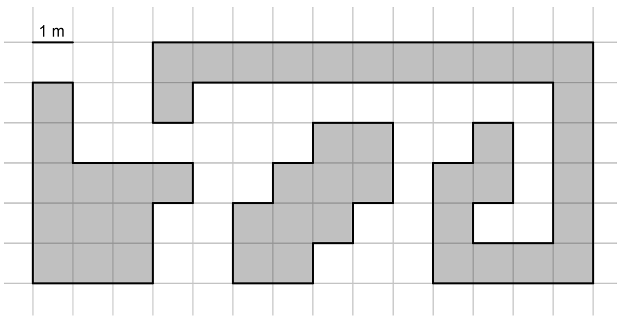
6.2. Ejercicios para practicar

Ejercicio 24. [Área y perímetro "a mano"]

Para las siguientes figuras, tomando como referencia la medida del segmento indicado, calculen el área y el perímetro.

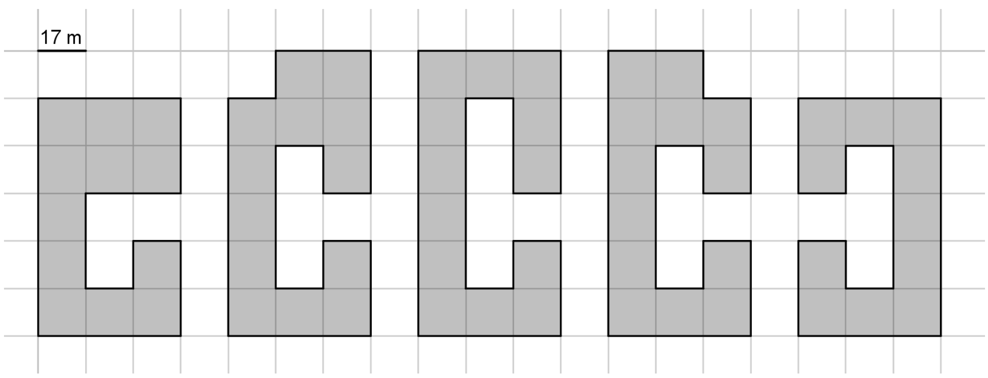
(a) ¿En qué unidades se mide el área?

(b) ¿En qué unidades se mide el perímetro?



Ejercicio 25. [Cambiando la escala]

Para las siguientes figuras, tomando como referencia la medida del segmento indicado, calculen el área y el perímetro.

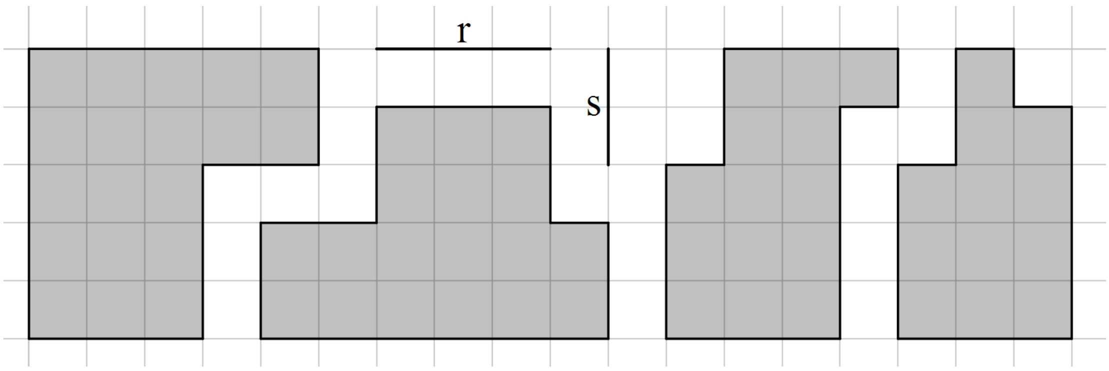


(a) ¿En qué unidades se mide el área?

(b) ¿En qué unidades se mide el perímetro?

Ejercicio 26. [Vale más lo que leemos que lo que vemos]

Para las siguientes figuras calculen el área y el perímetro, sabiendo que el segmento r mide 1 cm y el segmento s mide 3 cm. (¡Atención! La información de las medidas de r y s no coincide con lo que se ve.)



Ejercicio 27. [Figuras con datos]

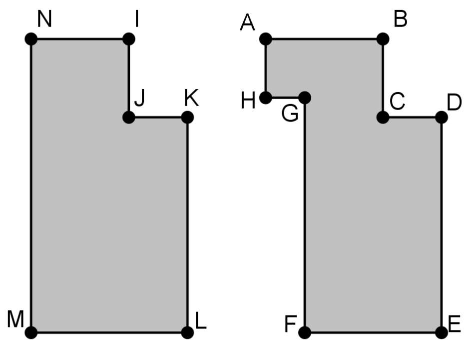
Para las siguientes figuras:

(a) Calculen el área y el perímetro sabiendo las medidas de: $\overline{JK} = 3$, $\overline{KL} = 11$, $\overline{LM} = 8$, $\overline{MN} = 15$.

(b) Calculen el área sabiendo las medidas de: $\overline{JK} = 7$, $\overline{KL} = 17$, $\overline{MN} = 23$, perímetro $= 80$.

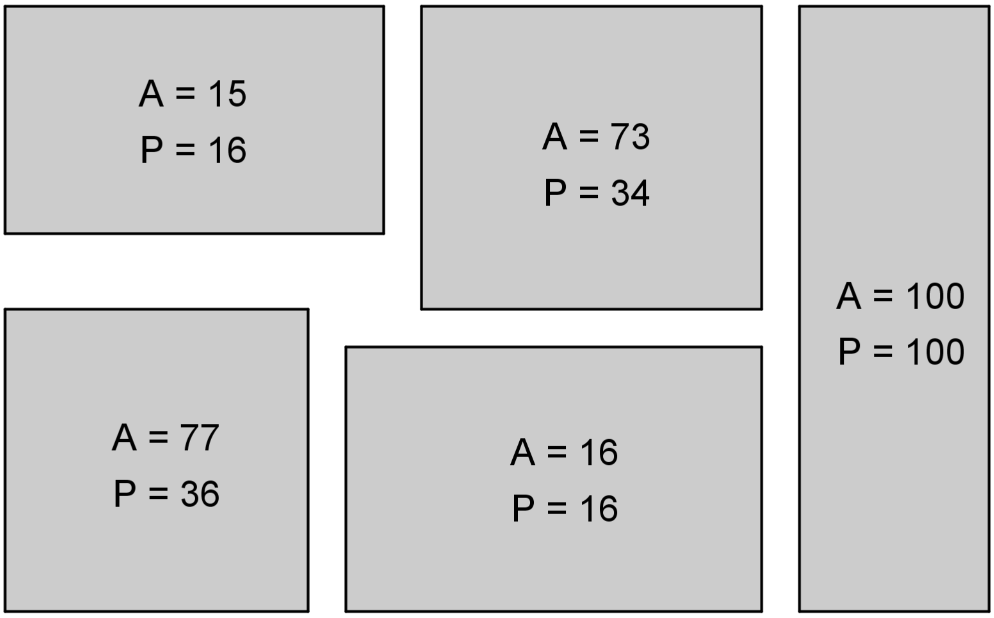
(c) Calculen el perímetro sabiendo las medidas de: $\overline{JK} = 5$, $\overline{KL} = 13$, $\overline{NI} = 7$, área $= 192$.

(d) Calculen el área y el perímetro sabiendo las medidas de: $\overline{AB} = 7$, $\overline{CD} = 3$, $\overline{GH} = 4$, $\overline{AH} = 3$, $\overline{DE} = 11$, $\overline{FG} = 5$.



Ejercicio 28. [¿Y los lados?]

Para las siguientes figuras, sabiendo que A representa el valor del área y P representa el valor del perímetro calculen la longitud de los lados.



6.3. Vademecum Matematicæ

Ésta es la sección para que elaboren ustedes. Se repite en todas las clases y pueden consultar su estructura en la página 14.

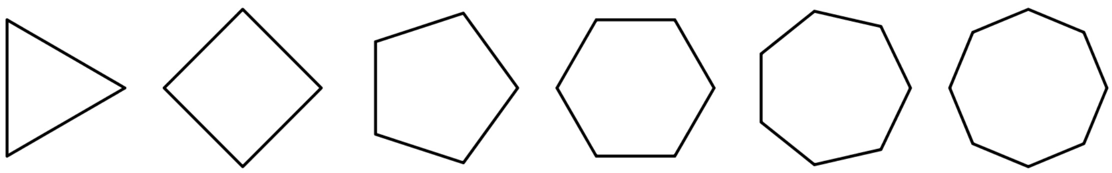
Clase 7. Modelización matemática

7.1. Problemas para la clase

Problema 17. [Gente muy sociable] En una reunión se encuentran siete personas. Al llegar, todas se saludan con todas, chocando sus puños. ¿Cuántos choques de puño hay?

Problema 18. [Contar diagonales]

¿Cuántas diagonales tiene un heptágono?



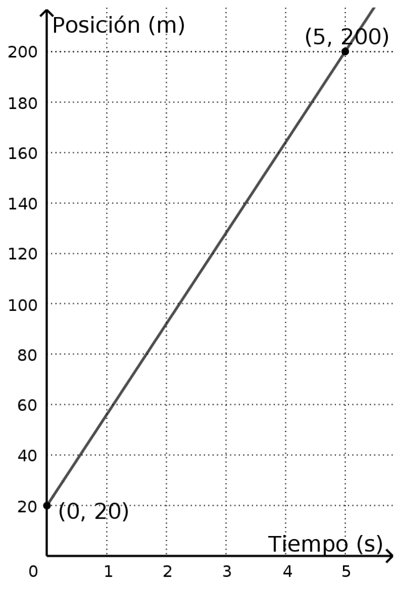
Problema 19. [Posición y tiempo]

Un automóvil recorre un tramo de ruta. El gráfico describe la posición que ocupa (medida en metros), en cada instante (medido en segundos).

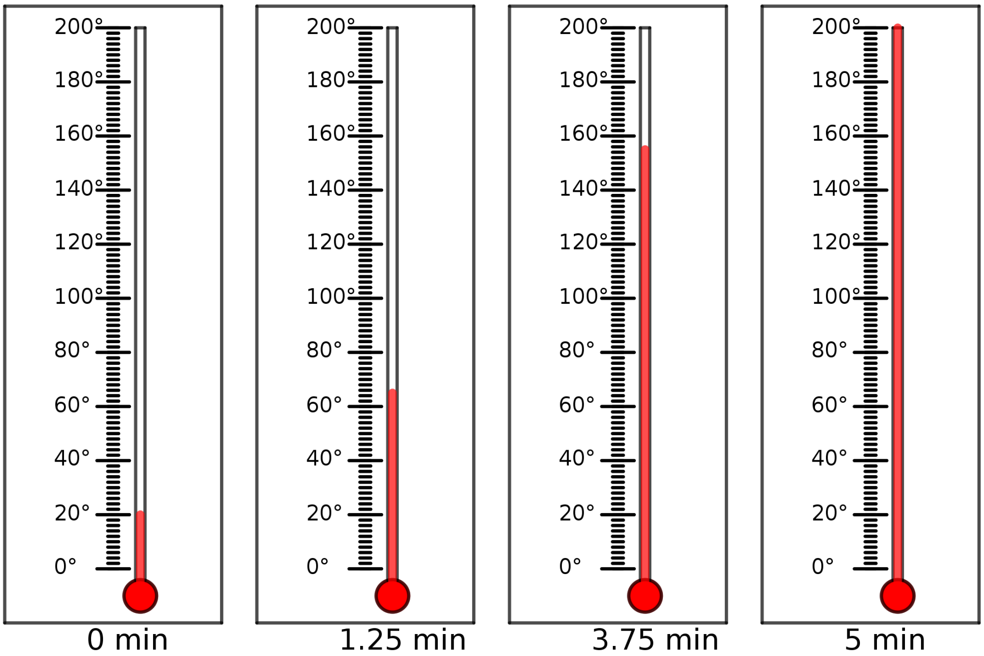
(a) Escriban alguna información que puedan leer con precisión en el gráfico.

(b) Escriban alguna información puedan leer en el gráfico, pero de forma solo aproximada.

(c) ¿Se podría, con la información del gráfico, describir con total precisión qué posición ocupa el auto en cualquier instante de tiempo (entre los 0 s y los 5 s) que nos interese?



Problema 20. [Estamos en el horno] Un termómetro se metió en un horno y se fue registrando su temperatura, a medida que transcurría el tiempo. Las siguientes imágenes describen los registros:



Si se sabe que el registro del termómetro fue aumentando a velocidad constante, ¿se puede deducir qué habrá marcado en los minutos 1, 2, 3 y 4?

Problema 21. [La bañera de Arquímedes] Arquímedes de Siracusa comienza a llenar su bañera. Todavía no sabe que al entrar en ella un arrebato de inspiración le dictará el principio físico que acompañará a la raza humana, como un legado imprescindible, hasta el fin de los tiempos.

Para comenzar el llenado de la bañera (que ya tiene un poco de agua, hay que decirlo), Arquímedes la conecta a un viaducto mediante una tubería y el agua va ingresando, siempre con el mismo caudal.

En la siguiente fórmula, t es el tiempo transcurrido en minutos desde el momento en que inició el llenado y V es el volumen de agua que hay en la bañera, medido en litros.

$$V = 36t + 20$$

Conviene aclarar que todavía faltan unos 1200 años para que se inventen los minutos y otros 800 para que se invente el litro. Pero traducimos las unidades de medida por cuestiones de comodidad.

La bañera tiene una capacidad de 180 litros y se desea saber cuánto tiempo será necesario para llenarla y cuánta agua se derramará si el acceso se deja abierto durante 10 min.

(a) Redacten el problema de la manera más breve posible, conservando toda la información necesaria para que se pueda resolver y eliminando todo el relato decorativo.

(b) Resuelvan el problema.

7.2. Ejercicios para practicar

Ejercicio 29. [De palabras a gráficos] Grafiquen en distintos sistemas de coordenadas los puntos del plano que cumplen cada una de las siguientes condiciones:

(a) La coordenada y es el doble de la coordenada x.

(b) La coordenada y es la mitad de la coordenada x.

(c) La suma de las coordenadas de los puntos es 3.

(d) La diferencia entre las coordenadas de los puntos es 3.

(e) El doble de la coordenada x más el triple de la coordenada y es 1.

Ejercicio 30. [De palabras (o gráficos) a fórmulas] Escriban una fórmula que involucre a las variables x e y de cada ítem del ejercicio anterior, para describir las rectas que graficaron.

Las funciones que pueden representarse gráficamente mediante una recta se denominan **funciones lineales**, y en general van a estar definidas de la siguiente manera:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} / f(x) = mx + b$$

donde m es la pendiente (determina la inclinación de la recta) y b es la ordenada al origen (determina el punto de coordenadas $(0, b)$ donde la recta cruza al eje y).

Si uno desea trabajar con puntos y rectas a nivel geométrico y todavía no quiere hablar de funciones, puede utilizar simplemente la ecuación

$$y = mx + b$$

que en realidad es la misma, ya que $f(x) = y$.

Ejercicio 31. [De tablas a gráficos] Completen las tablas y grafiquen las siguientes funciones lineales:

(a) $y = 2x - 1$

x	y
-3	
-2	
0	
1	
4	

(b) $y = -x + 5$

x	y
-2	
0	
3	
6	
8	

(c) $y = \frac{x}{2} + 3$

x	y
-8	
-6	
2	
4	
8	

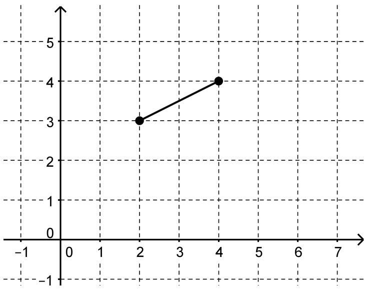
(d) $y = -3x + 2$

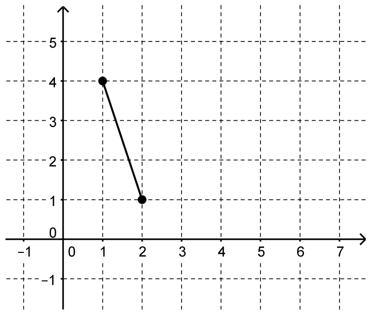
x	y
-3	
-1	
0	
2	
3	

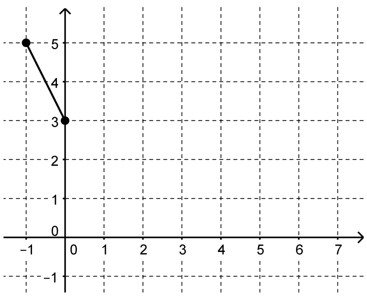
Ejercicio 32. [Fórmula de recta por dos puntos] Encuentren, en cada caso, la fórmula $y = mx + b$

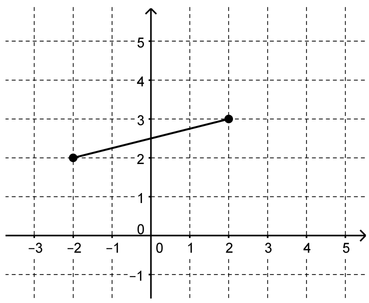
(a) $f(1) = 0, f(-2) = -\frac{3}{2}$ (b) $f(-3) = 7, f(10) = 7$ (c) $f(-2) = 1, f(4) = 13$

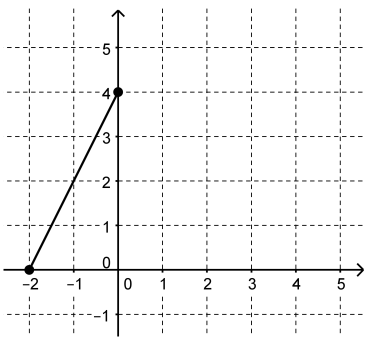
Ejercicio 33. [Fórmula a partir de gráfico] Cada uno de los siguientes gráficos muestra una parte del gráfico de una función lineal (con ecuación $f(x) = mx + b$). Determinen, en cada caso, los valores de m y b y escriban, entonces la ecuación de la función correspondiente.

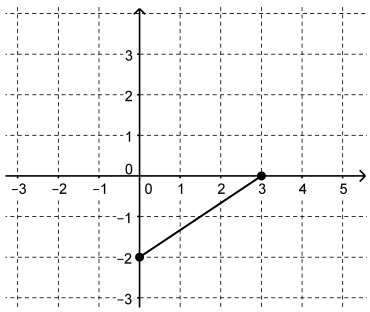
(a)


(b)


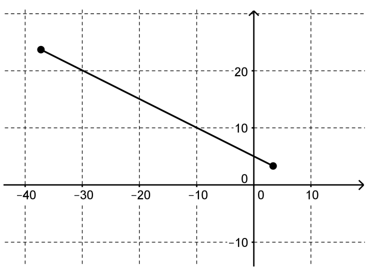
(c)


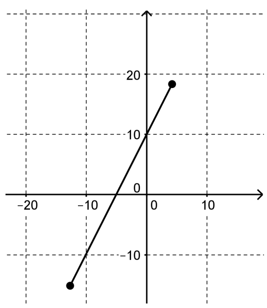
(d)


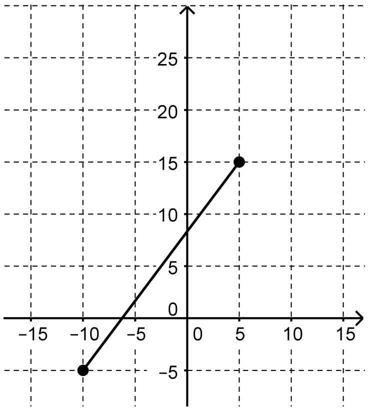
(e)


(f)


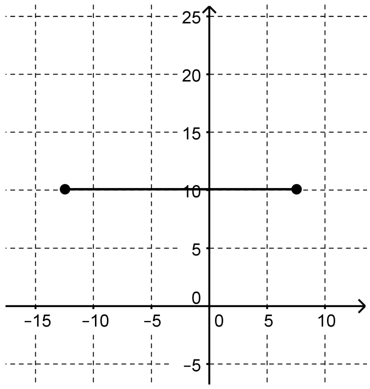
Ejercicio 34. [Más fórmulas a partir de gráficos] Repitan el ejercicio anterior para cada uno de estos nuevos gráficos.

(a)


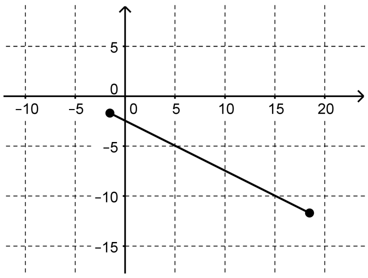
(b)




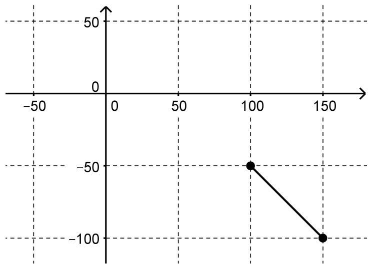
(c)



(d)



(e)



(f)

Ejercicio 35. [Fórmula a partir de punto y pendiente]

(a) Hallen la ecuación de la recta de pendiente m que pasa por el punto P.

a) $P=(1,-2)$, $m=3$
b) $P=(5,8)$, $m=0$
c) $P=(-3,4)$, $m=-1$
d) $P=(-1,1)$, $m=-\frac{3}{2}$

(b) Encuentren la pendiente de la recta que pasa por P y Q.

a) $P=(2,1)$, $Q=(-4,3)$
b) $P=(3,-2)$, $Q=(5,-2)$
c) $P=(0,7)$, $Q=(7,0)$

Ejercicio 36. [De fórmula a gŕafico] Grafiquen las funciones lineales del ejercicio anterior.

Ejercicio 37. [Contexto de posición en función de tiempo] Si $r(t)=2t+3$ describe, en función del tiempo, la posición de un móvil que se desplaza con velocidad constante, expresen y representen en un sistema de coordenadas.

(a) La posición de otro móvil que se desplaza a igual velocidad y que está tres unidades de distancia adelantado.

(b) La posición de otro móvil que se desplaza al doble de velocidad y en el instante $t=0$ se encuentra en el mismo punto que el primero.

(c) La posición de otro móvil que se desplaza con la misma velocidad pero en sentido contrario y parte en $t = 0$ del mismo punto que el primero.

Ejercicio 38. [Interpretar contextos] En cada una de las siguientes situaciones identifiquen cuál es el valor inicial y cuál es la razón de cambio y expliquen en palabras —por escrito— cuáles son sus significados en el contexto.

(a) Una nave espacial libera una sonda que viaja alejándose de la Tierra. La distancia de la sonda a la Tierra después de t segundos está dada por $s = 600 + 5t$.

(b) Después de una lluvia el agua en un balde comienza a evaporarse. La cantidad en litros que queda después de t días viene dada por $V = 50 - 1{,}2t$.

(c) El cargo mensual de un celular es $200 + 0{,}53n$ pesos, donde n es la cantidad de minutos de conversación telefónica.

(d) El valor de una antigüedad es $30000 + 200n$ pesos, donde n es el número de años transcurridos desde el momento en que la antigüedad fue comprada.

(e) Un profesor califica el total de las tareas que un estudiante debe entregar con $100 - 3n$ puntos, donde n es el número de tareas que un alumno no entregue.

(f) La población P de una ciudad se puede predecir como $P = 9000 + 500t$, dentro de t años a partir de ahora.

Ejercicio 39. [Formular preguntas] Para cada una de las situaciones del Ejercicio anterior, redacten una pregunta que se pueda responder mediante el modelo.

7.3. Vademecum Matematicæ

Ésta es la sección para que elaboren ustedes. Se repite en todas las clases y pueden consultar su estructura en la página 14.

Clase 8. Definiciones

8.1. Problemas para la clase

Problema 22. [Números azules] En este problema trabajarán a partir de la interpretación de una definición matemática[1].

> **Definición 1:** Un número es ***cuadrado*** si es igual a un número entero multiplicado por sí mismo.

> **Definición 2:** Un número es ***azul*** si es la suma de algún número entero y su cuadrado.

(a) Interpreten la Definición 1 y construyan una lista de números cuadrados.

(b) Interpreten la Definición 2 y decidan si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Expliquen la decisión tomada:

- (i) Todos los números azules son números enteros.
- (ii) Existen números azules que son enteros.
- (iii) Existen números azules que son racionales.
- (iv) Existen números azules que no son enteros.
- (v) Todos los números azules son pares.
- (vi) Existen números azules negativos.

[1] cuando un/a matemático/a se encuentra pensando con mucha frecuencia acerca de una idea nueva y necesita referirse a ella, se vuelve necesario ponerle un nombre. Pero el nombre elegido debe estar acompañado de una explicación que permita distinguir con claridad a esa idea y diferenciarla de otras ideas distintas. Por ejemplo, la palabra *triángulo* designa a un tipo de figura geométrica. La **definición** de *triángulo* es la explicación que permite decidir si una figura geométrica es o no es un triángulo. En la vida cotidiana también se designan las ideas y objetos mediante palabras, pero las definiciones de las palabras pueden ser imprecisas. Si decimos, por ejemplo, "Esperé un *rato* al colectivo", ¿puede ser que lo hayamos esperado 5 minutos? Seguramente sí. ¿Puede ser que lo hayamos esperado 5 años? Seguramente no. ¿Y 5 horas? ¿Es demasiado? ¿después de cuánto tiempo el tiempo de espera deja de ser un *rato*, para pasar a ser otra cosa? El lenguaje cotidiano admite este tipo de imprecisiones y logramos comunicarnos bastante bien, a pesar de ellas. En la matemática esas imprecisiones no son admisibles. La precisión de una definición matemática debe ser absoluta.

Dicen que para pelar una papa hacen falta dos cosas: un cuchillo y una papa. De la misma manera, en matemática, para decidir, por ejemplo, si un número es o no es primo hacen falta dos cosas: un número y saber a qué se llama número primo.

(c) Decidan cuáles de los siguientes números son azules y cuáles no. Expliquen la decisión tomada:

- 280
- 2
- $\sqrt{2}+2$
- -182
- $\frac{3}{5}$
- 0
- 182
- 870

Problema 23. [Inventar definiciones] El concepto de número ***azul***, definido en el problema anterior, no figura en los libros tradicionales de matemática ni forma parte de la matemática “clásica” que se estudia en la escuela o en la universidad, sino que fue inventado para desarrollar el problema. Cualquiera puede inventar y definir un concepto matemático y ponerle un nombre.

(a) Inventen un tipo de número, dándole un nombre específico y estableciendo su definición.

(b) Intercambien la definición inventada con un compañero o compañera.

(c) Lean la definición recibida y escriban una lista de números que verifiquen esa definición.

(d) Devuelvan la definición y la lista de ejemplos a su autor o autora y reciban la propia. Luego controlen la lista de ejemplos y decidan si la definición que inventaron fue bien interpretada por su compañero o compañera.

(e) En el punto (b) del **Problema** 22 se realizaron algunas afirmaciones acerca de los números azules. Realicen proposiciones acerca de los números definidos por su compañero o compañera e intenten justificar las que resulten verdaderas.

Problema 24. [Algo sobre triángulos]

Las siguientes definiciones **sí** son conocidas y están en los libros. Seguramente las han visto en la escuela. Se pueden redactar de muchas maneras equivalentes. Al redactar este material, elegimos una, pero ustedes pueden googlear los términos y comparar estas efiniciones con las que encuentren en Internet.

Acerca de los **lados** de un triángulo.

- Se dice que un triángulo es **equilátero** si sus tres lados miden lo mismo.
- Se dice que un triángulo es **isósceles** si tiene dos lados que midan lo mismo.
- Se dice que un triángulo es **escaleno** si no tiene dos lados que midan lo mismo.

Acerca de los **ángulos** de un triángulo.

- Se dice que un triángulo es **acutángulo** si sus tres ángulos son agudos.
- Se dice que un triángulo es **obtusángulo** si tiene un ángulo obtuso.
- Se dice que un triángulo es **rectángulo**[2] si tiene un ángulo recto.

(a) Algunas de las definiciones anteriores incluyen otros conceptos que tal vez conocen y tal vez no. En caso de que alguno de esos conceptos les impida comprender la definición, exploren en Internet para terminar de aclararlos.

[2] Acá “rectángulo” no es un sustantivo, sino un adjetivo.

(b) Construyan ejemplos de cada tipo de triángulo.

(c) Decidan si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa y expliquen por qué:

   (i) Todos los triángulos equiláteros son isósceles.
   (ii) Existen triángulos obtusángulos isósceles.
   (iii) Existen triángulos equiláteros acutángulos.
   (iv) Todos los triángulos equiláteros son acutángulos.
   (v) Si un triángulo es rectángulo no puede ser isósceles.

Problema 25. [Más sobre triángulos]

Definición inventada:

> **Definición:** Un triángulo es ***escalonado*** si las medidas de sus lados (tomadas en centímetros) son tres números enteros consecutivos.

Investiguen si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas y expliquen por qué:

(i) Existen infinitos triángulos escalonados.

(ii) Todos los triángulos escalonados son acutángulos.

(iii) Existen triángulos escalonados escalenos.

(iv) Todos los triángulos escalonados son escalenos.

(v) Existen dos triángulos rectángulos escalonados.

8.2. Ejercicios para practicar

Ejercicio 40. [Números perfectos]

> **Definición:** Un número entero es perfecto si es igual a la suma de sus divisores, sin contarlo a él mismo como divisor.

(a) Investiguen si alguno de los siguientes números es perfecto:

4	18	496
6	28	512
8	36	784

(b) Investiguen si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas y expliquen por qué:

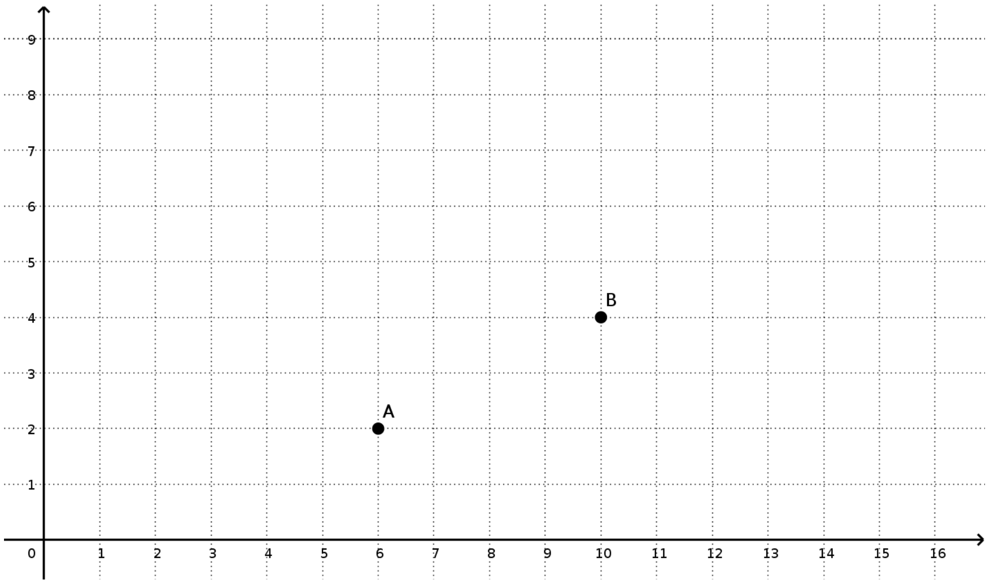
   (i) La suma de números perfectos siempre es un número perfecto.
   (ii) El producto de números perfectos siempre es un número perfecto.

Ejercicio 41. [Más cuadriláteros]

Retomamos el **Ejercicio** 4 de la página 13, agregando las siguientes defniciones sobre cuadriláteros. Al igual que en el **Problema** 24 se trata de definiciones conocidas que están en los libros.

- **Definición:** Llamamos **paralelogramo** a un cuadrilátero que tiene sus lados opuestos paralelos.
- **Definición:** Llamamos **romboide** a un cuadrilátero que tiene dos pares de lados consecutivos iguales[3].
- **Definición:** Llamamos **trapecio** a un cuadrilátero algún par de lados opuestos paralelos.

Observen la figura y realicen las consignas que vienen a continuación. Puede ser conveniente responder cada consigna en un sistema de ejes cartesianos distinto, para que no se encimen los trazos y se vuelva incómodo de leer visualmente.



(a) Dados los puntos A y B, ubiquen puntos C_1 y D_1 de manera que ABC_1D_1 sea un rectángulo.

(b) Dados los puntos A y B, ubiquen puntos C_2 y D_2 de manera que ABC_2D_2 sea un rombo.

(c) Dados los puntos A y B, ubiquen puntos C_3 y D_3 de manera que ABC_3D_3 sea un cuadrado.

(d) Dados los puntos A y B, ubiquen puntos C_4 y D_4 de manera que ABC_4D_4 sea un paralelogramo.

(e) Dados los puntos A y B, ubiquen puntos C_5 y D_5 de manera que ABC_5D_5 sea un romboide.

(f) Dados los puntos A y B, ubiquen puntos C_6 y D_6 de manera que ABC_6D_6 sea un trapecio.

[3] Atención con esta definición, si la buscan en libros o en Internet. Las figuras conocidas que hemos definido en el taller pueden aparecer en otras fuentes con definiciones que están redactadas de manera distinta, pero resultan equivalentes, porque definen las mismas figuras. En cambio, no hay un consenso general acerca de lo que es un romboide. Al redactar el material, elegimos esta definición. Las preguntas que hagamos en este ejercicio están pensadas para interpretar estas definiciones.

Ejercicio 42. [Acerca del ejercicio anterior] En el ejercicio anterior se propusieron seis consignas.

(a) Observen las soluciones que propusieron y respondan: ¿hay alguna de las soluciones propuestas para responder a alguna de las consignas que también resultaría válida como respuesta para otra (u otras) de las consignas?

(b) Partiendo de los mismos puntos A y B del Ejericico anterior, ¿cuál es la mínima cantidad de cuadrilateros que deben construir para tener al menos uno que sirva como respuesta a cada consigna?

8.3. Vademecum Matematicæ

Ésta es la sección para que elaboren ustedes. Se repite en todas las clases y pueden consultar su estructura en la página 14.

Clase 9. Trabajo Práctico 2 (TP2)

Durante esta clase se desarrollará el Trabajo Práctico 2 (TP2).

Ejercicio 43. [Evocación y relectura] En la clase correspondiente al TP1, seguramente habrás leído un texto con recomendaciones acerca de cómo desarrollarlo. Ese texto está en la página 26. Te proponemos que trates de escribir las ideas fundamentales que recuerdes de ese texto, seguramente enriquecidas por tu experiencia de haber realizado el TP1 y que luego vuelvas a leerlo y compares.

Bibliografía

Acercamiento no tradicional

Libros de acercamiento a la matemática por caminos no tradicionales. Suelen ser recopilaciones de temas, artículos de divulgación, matemática recreativa o bien obras estrictamente literarias, pero que, a nuestro juicio, guardan algún tipo de vínculo con la matemática o, al menos, coinciden con ella en aspectos estéticos.

Bernabeu Soria, G. (2002). *100 problemas matemáticos*. Alicante: CEFIRE de ELDA.

Gardner, M. (2009). *¡AJA! Inspiración*. Su obra de divulgación de la matemática fue la inspiración para muchas personas se inclinaran al estudio de la matemática o simplemente pudieran percibir las maravillas que viven allí dentro. Todos sus libros son tesoros altamente recomendables para adentrarse al mundo matemático. RBA LIBROS, pág. 355.

Guedj, D. (2000). *El teorema del loro*. Una novela con trama de espionaje. Un anciano recibe por correo un container lleno de libros de matemática. Se trata de la biblioteca personal de un antiguo compañero suyo de estudios, cuyo paradero es desconocido. El anciano, que no es matemático sino filósofo, se propondrá ordenar esa biblioteca. Eso lo llevará a recorrer la historia de la matemática y reconocer sus distintas ramas, haciendo al lector testigo de esta investigación y aprendiendo matemática junto a él, en el transcurso del relato. Paralelamente, tendrá oportunidad de indagar a qué se debe la misteriosa desaparición de su antiguo compañero. Madrid: Anagrama, pág. 583.

Paenza, A. (2005). *Matemática... ¿Estás ahí?* Adrián Paenza, un matemático que aprovecha su figura mediática para la noble tarea de difundir la ciencia, reúne en esta serie de 5 libros un compendio de acertijos, juegos lógicos y curiosidades matemáticas, explicados y discutidos en lenguaje coloquial, para que todos los lectores puedan sorprenderse y divertirse. Buenos Aires: Siglo XXI, pág. 240.

Perkins, D. (2003). *La bañedera de Arquímedes y otras historias del descubrimiento científico: el arte del pensamiento creativo*. Barcelona: Paidós, pág. 302.

Polya, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trillas, pág. 205.

Singh, S. (1999). *El último teorema de Fermat*. Cuenta la historia de la resolución de un problema matemático planteado en el siglo XVII, recorriendo biografías de matemáticos involucrados, anteriores y posteriores. Pero, por sobre todas las cosas, pinta de una manera impecable los sufrimientos y avatares que transita un investigador solitario obsesionado por un problema. La expectativa por la resolución parece por momentos la trama de una novela de suspenso. Bogotá: Norma, pág. 464.

Smullyan, R. (2002). *Bosques curiosos y pájaros aristocráticos*. Raymond Smullyan creó un género, el de los enigmas lógicos. Con divertidos desafíos es capaz de adentrarnos en profundos resultados de la lógica, la matemática, la teoría de la computabilidad y la informática. Barcelona: Gedisa.

Stewart, I. (2007). *Historia de las matemáticas en los últimos 10000 años*. Stewart tiene, con sus libros, el don extraordinario de hacer no sólo comprensibles, sino incluso apasionantes las matemáticas avanzadas, incluyendo sus descubrimientos más recientes, como la demostración final del último teorema de Fermat, las nuevas aportaciones a la teoría de nudos, el teorema de los cuatro colores, los modelos del caos, los fractales y "las dimensiones dos y medio". Barcelona: Crítica.

Tahan, M. (2008). *El hombre que calculaba*. Este clásico de la divulgación cuenta las andanzas del calculista Beremiz Samir por la antigua Persia y cómo de la mano de la matemática y su sabiduría resuelve mil situaciones para abrirse paso en la corte del sultán y comer perdices. Editorial PLUMA Y PAPEL, pág. 288.

Acercamiento tradicional

Este acercamiento se realiza a través de libros técnicos, de textos, dedicados a un tema específico. Es así como van a estudiar en la enorme mayoría de las materias de la carrera. Los que mencionamos son algunos libros de nivel secundario y universitario que encontrarán en la Biblioteca y otros de nivel universitario que nos gustan mucho y que a nuestro juicio se diferencian de otros de similares contenidos.

Altman, S., C. Comparatore y L. Kurzrok (s.f.[a]). *Matemática 1: Funciones 1*. Toda esta serie de libros está dirigida a alumnos de escuela media. Pero el tratamiento de los temas es fundamentado tanto como el conocimiento matemático de los lectores lo permite. Presentan muchos ejemplos de aplicaciones concretas, problemas resueltos y discutidos y una gran variedad de problemas y ejercicios para practicar. Son una buena fuente de consulta para recordar temas que se supone estudiados en la escuela secundaria o para cubrir aquellos que no hayan llegado a dominarse. Buenos Aires: Longseller.

— (s.f.[b]). *Matemática 3: Números y sucesiones*. Buenos Aires: Longseller.

Aragón, A. y col. (2004). *Introducción a la matemática para el primer ciclo universitario*. Buenos Aires: Universidad de General Sarmiento, pág. 459.

Carnelli, G. y col. (2007). *Matemática para el aprestamiento universitario*. Buenos Aires: Universidad de General Sarmiento, pág. 264.

Guzmán, M. de, J. Colera y A. Salvador (s.f.). *Bachillerato 1, 2 y 3*. Son libros donde se encuentran las contenidos del colegio secundario y algunos más también en los tomos 2 y 3, tratados de una manera más acorde con la idea de este taller. Además de poder usarlos de consulta sobre los contenidos en cuestión tienen una buena introducción a cada uno de los temas, con reseñas históricas que ayudan a comprender mejor el porqué, y cuentan también con muchas curiosidades interesantes.

Sitios de Internet

Internet es una fuente prácticamente inagotable de recursos sobre matemática y cultura en general. Aquí una pequeña muestra de sitios y páginas en castellano. El horizonte se ensancha más si uno domina otro/s idioma/s.

Década votada (s.f.). Esta aplicación muestra las más de 3.000 votaciones nominales de la Cámara de Diputados desde 2001 y del Senado de la Nación Argentina desde 2004, y de la Legislatura de la Ciudad de Buenos Aires desde 2016 de acuerdo a las actas oficiales (diputados, senadores y legislatura). URL: http://www.decadavotada.com.ar/.

Divulgamat (s.f.). Un sitio que como su nombre los sugiere se dedica a la divulgación de la matemática. URL: http://www.divulgamat.net/.

El Gato y La Caja (s.f.). Un sitio donde se hace ciencia y se populariza la ciencia. Abarrotado de lecturas que te transforman, te muestran que la ciencia es de todas las personas y te invitan a quererla y defenderla. URL: https://elgatoylacaja.com.ar/.

Espejo lúdico (s.f.). Un sitio donde lo lúdico esta continuamente cruzado por la matemática. URL: http://espejo-ludico.blogspot.com/.

Gaussianos (s.f.). Un blog español dedicado enteramente a sucesos y cultura matemática. URL: http://www.gaussianos.com/.

GeoGebra (s.f.). Soft gratuito para trabajar, experimentar y aprender matemática investigando. URL: http://geogebra.org/.

Máxima (s.f.). Máxima un sistema de álgebra computacional gratuito y muy poderoso. URL: http://maxima.sourceforge.net/es/.

Microsiervos (s.f.). Dicen sus autores: "Solemos describirlo como un blog de divulgación sobre tecnología, ciencia, Internet y muchas cosas más, pero lo cierto es que es más complejo que todo eso: tiene muchas anotaciones de humor y otros temas muy variados que nos interesan a los autores, como la astronomía y la aviación, los juegos de azar, las leyendas urbanas, los gadgets, las grandes o pequeñas conspiraciones o los puzzles. También publicamos reseñas de libros y películas, algunas vivencias personales, de nuestros respectivos trabajos o de gente cercana, y cualquier otra cosa que nos apetece." URL: https://www.microsiervos.com.

MiKTeX (s.f.). Organización sobre edición de textos matemáticos. URL: http://miktex.org/.

Molinari, P. (s.f.). *Molinerd (Instagram)*. Cuenta de Instagram del comediante Pablo Molinari. Entre muchas otras cosas, Pablo tiene una experiencia y sensibilidad matemática que pone al servicio del humor, para ilustrar, con gráficos y recursos matemáticos diversos, variadas circunstancias de la vida cotidiana. URL: https://www.instagram.com/molinerd/.

Olimpiada Iberoamericana de Matemática (s.f.). URL: http://www.oei.es/oim/.

Olimpíada Matemática Argentina (s.f.). El sitio de la Olimpíada Matemática Argentina muy buen material de resolución de problemas. URL: http://www.oma.org.ar/.

OpenStreetMap (s.f.). OpenStreetMap es un mapa del mundo, creado por gente como tú y de uso libre bajo una licencia abierta. URL: https://www.openstreetmap.org/.

Paenza, A. (s.f.). *Libros de Paenza*. Links oficial a los libros de Paenza. Que se pueden descargar en forma gratuita. URL: http://mate.dm.uba.ar/~cepaenza/libro/LIBRO_PAENZA.htm.

Real Academia Española (s.f.). El sitio oficial de la Real Academia Española, que siempre es una referencia para consultar dudas acerca de nuestro idioma. URL: www.rae.es.

Revista de la Olimpiada Iberoamericana de Matemática (s.f.). Estos dos últimos, el sitio de la Olimpiada Iberoamericana de Matemática, con la revista de la OIM. URL: http://www.oei.es/oim/revistaoim/.

Nuestro derecho, nuestro lugar, nuestro futuro...

SECRETARÍA ACADÉMICA

MATERIAL DE DISTRIBUCIÓN GRATUITA

Av. Bartolomé Mitre N° 1891, (B1744OHC) Moreno,
Provincia de Buenos Aires, República Argentina.
Teléfonos:
0237 460-9300 (líneas rotativas)
011 2078-9170 (líneas rotativas)
www.unm.edu.ar
Universidad Nacional de Moreno
@unimoreno
@unm_oficial

UNM 2010
UNIVERSIDAD
DEL BICENTENARIO
ARGENTINO