UNIVERSIDAD
NACIONAL
DE MORENO

MATEMÁTICA I
(2111)

GUÍA PARA ESTUDIANTES

• GESTIÓN AMBIENTAL

2017

DEPARTAMENTO DE CIENCIAS APLICADAS Y TECNOLOGÍA

UNIVERSIDAD NACIONAL DE MORENO

Rector
Hugo O. ANDRADE

Vicerrector
Manuel L. GÓMEZ

Secretaria Académica
Adriana M. del H. SÁNCHEZ

Secretario de Investigación, Vinculación Tecnológica y Relaciones Internacionales
Jorge L. ETCHARRÁN

Secretaria de Extensión Universitaria
M. Patricia JORGE

Secretario general
V. Silvio SANTANTONIO

Consejo Superior

Autoridades
Hugo O. ANDRADE
Manuel L. GÓMEZ
Jorge L. ETCHARRÁN
Pablo A. TAVILLA
M. Patricia JORGE

Consejeros

Claustro docente:
Marcelo A. MONZÓN
Javier A. BRÁNCOLI
Guillermo E. CONY (s)
Adriana M. del H. SÁNCHEZ (s)

Claustro estudiantil:
Rocío S. ARIAS
Iris L. BARBOZA

Claustro no docente:
Carlos F. D'ADDARIO

DEPARTAMENTO DE ECONOMÍA Y ADMINISTRACIÓN

Director - Decano
Pablo A. TAVILLA

Licenciatura en Relaciones del Trabajo
Coordinadora - Vicedecana
Sandra M. PÉREZ

Licenciatura en Administración
Coordinador - Vicedecano
Pablo A. TAVILLA (a cargo)

Licenciatura en Economía
Coordinador - Vicedecano
Alejandro L. ROBBA

Contador Público Nacional
Coordinador - Vicedecano
Alejandro A. OTERO

DEPARTAMENTO DE HUMANIDADES Y CIENCIAS SOCIALES

Directora - Decana
M. Patricia JORGE

Licenciatura en Trabajo Sicial
Coordinadora - Vicedecana
M. Claudia BELZITI

Licenciatura en Comunicación Social
Coordinador - Vicedecano
Roberto C. MARAFIOTI

Ciclo de Licenciatura en Educación Secundaria
Coordinadora - Vicedecana
Lucía ROMERO

Ciclo de Licenciatura en Educación Inicial
Coordinadora - Vicedecana
Nancy B. MATEOS

DEPARTAMENTO DE CIENCIAS APLICADAS Y TECNOLOGÍA

Director - Decano
Jorge L. ETCHARRÁN

Ingeniería en Electrónica
Coordinador Vicedecano
Daniel A. ACERBI (int)

Licenciatura en Gestión Ambiental
Coordinador - Vicedecano
Jorge L. ETCHARRÁN

Licenciatura en Biotecnología
Coordinador - Vicedecano
Fernando C. RAIBENBERG (int)

DEPARTAMENTO DE ARQUITECTURA, DISEÑO Y URBANISMO

Directora - Decana
N. Elena TABER (a cargo)

Arquitectura

Coordinadora - Vicedecana

N. Elena TABER (int.)

MATEMÁTICA I
(2111)

GUÍA DE PROBLEMAS
2017

MATEMÁTICA I (2111) : GUÍA DE PROBLEMAS 2017 LICENCIATURA EN GESTIÓN AMBIENTAL / PABLO COLL ... [ET AL.]. - 2A ED . - MORENO: UNM EDITORA, 2017.
LIBRO DIGITAL, PDF - (CUADERNOS DE CÁTEDRA)

ARCHIVO DIGITAL: DESCARGA Y ONLINE
ISBN 978-987-3700-59-0

1. MATEMÁTICA. I. COLL, PABLO
CDD 510

Colección: Cuadernillos de Cátedra
Directora: Adriana M. del H. SÁNCHEZ
Autores: Pablo COLL
Fernando CHORNY
Mauro NICODEMO
Hernán RODRÍGUEZ URETA
Diego MELCHIORI

2.ª edición: abril de 2017

Av. Bartolomé Mitre N.° 1891, Moreno (B1744OHC),
prov. de Buenos Aires, Argentina
Teléfonos:
(0237) 466-7186 / 1529 / 4530
(0237) 488-3151 / 3147 / 3473
(0237) 425-1786 / 1619
(0237) 462-8629
(0237) 460-1309
Interno: 154
unmeditora@unm.edu.ar
http://www.unm.edu.ar/editora

La edición en formato digital de esta obra se encuentra disponible en:
http://www.unm.edu.ar/repositorio/repositorio.aspx
ISBN (version digital): 978-987-3700-59-0

MATERIAL DE DISTRIBUCIÓN GRATUITA

REUN
RED DE EDITORIALES DE UNIVERSIDADES NACIONALES

UNIVERSIDAD NACIONAL DE MORENO
Editora

L U A
Libro Universitario Argentino

Parte I

Modelización con funciones

Unidad 1: Modelos lineales

Fórmulas, distancias y temperaturas

Cajitas de colores

Problema 1 ( ) Para trabajar con este problema necesitan abrir el archivo `cajitas.ggb`[1] en el que verán unas casillas de colores que contienen números. Las casillas se comportan de la siguiente manera:

Cada casilla de color toma el número de la casilla a su izquierda y lo transforma mediante un cálculo. Por ejemplo: la casilla celeste toma el valor de la verde, realiza un cálculo con él y muestra el resultado.

Sólo se pueden ingresar valores en la casilla roja (luego apretar «Enter»). Una vez ingresado el valor de la casilla roja las otras casillas se actualizan automáticamente.

a) ¿Qué hace la casilla anaranjada con el valor de la roja? ¿Qué hace la casilla verde con el valor de la amarilla?

b) Si quisieran que en la casilla amarilla haya un 6, ¿qué número tendrían que poner en la roja?

c) ¿Qué número puedo poner en la casilla amarilla para que en la verde aparezca un 36? ¿Qué otro número puedo poner en la casilla amarilla para que pase lo mismo en la verde? Entonces, ¿qué dos valores puedo poner en la roja para obtener un 36 en la verde?

d) ¿Qué debería haber en la casilla roja para que en la celeste salga un 104? ¿Y para que salga un 3?

e) Escriban las fórmulas de la relación entre las siguientes casillas:

(i) $R \longrightarrow N$

(ii) $R \longrightarrow Am$

(iii) $Am \longrightarrow C$

(iv) $R \longrightarrow C$

f) Elijan la fórmula conveniente, entre las del ítem anterior, para explicar las situación del ítem d).

Problema 2 ( ) Para trabajar con este problema necesitan abrir el archivo `cajitas_2.ggb` en el que verán casillas similares a las del problema anterior.

a) Describan qué hace cada casilla con el valor de la casilla anterior.

[1] La idea original de esta actividad y de este archivo corresponde a Ernesto López

b) Si quisieran que en la casilla amarilla haya un $1,5$, ¿qué número tendrían que poner en la roja?

c) ¿Qué número puedo poner en la casilla amarilla para que en la celeste aparezca un 36? ¿Qué otro número puedo poner en la casilla amarilla para que pase lo mismo en la celeste? Entonces, ¿qué dos valores puedo poner en la roja para obtener un 36 en la verde?

d) ¿Qué debería haber en la casilla roja para que en la azul salga un 39? ¿Y para que salga un 28?

e) Escriban las fórmulas de la relación entre las siguientes casillas:

   (i) $R \longrightarrow N$

   (ii) $R \longrightarrow Am$

   (iii) $Am \longrightarrow Az$

   (iv) $R \longrightarrow Az$

f) Elijan la fórmula conveniente, entre las del ítem anterior, para explicar las situación del ítem d). Luego verifíquenla reemplazando las letras por los valores correspondientes.

Problema 3 ( ) Para trabajar con este problema necesitan abrir el archivo `cajitas_3.ggb` en el que verán casillas similares a las de los problemas anteriores.

a) Describan qué hace cada casilla con el valor de la casilla anterior.

b) Si quisieran que en la casilla azul haya un $64,5$, ¿qué número tendrían que poner en la roja? ¿Es único ese número?

c) ¿Qué número puedo poner en la casilla roja para que en la amarilla aparezca un 6? ¿Y para que aparezca un 1?

d) Describan todos los posibles valores que pueden aparecer en la casilla naranja, en la casilla amarilla y en la casilla verde.

Problema 4 En otro archivo de cajitas de colores como los anteriores, las fórmulas que relacionan las casillas son las siguientes:

- $N = -R$
- $Am = N + 2,5$
- $V = Am^2$
- $C = V - 1$

a) ¿Qué valor tendría cada casilla si se pusiera un -2 en la roja?

b) ¿Qué valor tendría cada casilla si se sabe que en la amarilla hay un 2?

c) ¿Y si se supiera que en la celeste hay un 3?

d) Escribir una fórmula que calcule el valor de la casilla celeste en función del valor de la casilla roja.

Temperaturas y longitudes

Problema 5 Navegando en Internet encontramos una página con el texto que se reproduce a continuación. El texto estaba en Inglés por lo que se le aplicó un traductor que produjo una versión en castellano, que se puede entender bastante bien. Sin embargo, las temperaturas y las longitudes han quedado expresadas en unidades que no son las que nosotros utilizamos habitualmente y que también es necesario traducir.

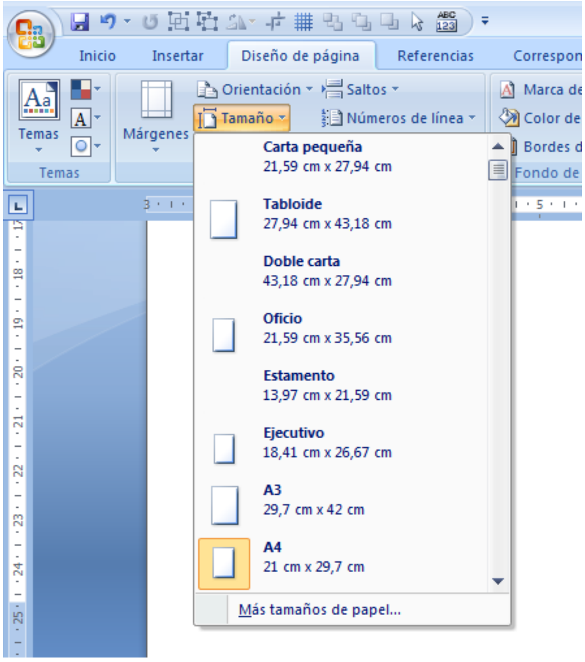
Cambio climático y efecto invernadero[a]

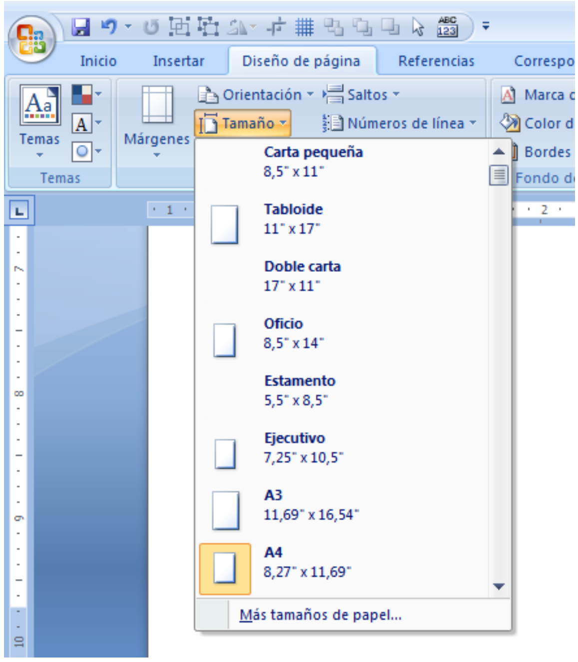
Existe un consenso total en la comunidad científica a la hora de culpar del fenómeno de cambio climático al aumento de concentración de gases de efecto invernadero generados por las actividades humanas.
La realidad es que sin la presencia natural de algunos de estos gases en la atmósfera, como el vapor de agua y el CO_2, creando el conocido efecto invernadero, la Tierra sería un lugar muy diferente al que ahora conocemos, con temperaturas medias $59,4°F$ por debajo de las actuales.
Mediante el efecto invernadero, ciertos gases atrapan las radiaciones que emite la tierra caliente, evitando que se pierdan en el espacio exterior. Sin los gases de efecto invernadero se estima que la temperatura media de la superficie terrestre sería de $-2,2°F$. El efecto invernadero natural hace posible la vida en nuestro planeta. Sin embargo, la quema de combustibles fósiles, la destrucción de los bosques, los cambios de usos del suelo, la producción de residuos y la emisión de ciertos gases artificiales, son factores que refuerzan el efecto invernadero, amenazando actualmente la salud del clima.
Una de las consecuencias estudiadas es el aumento del nivel medio del mar en el mundo. El mismo se elevó a un ritmo medio de 0,071″ (pulgadas) anual desde 1961 a 2003. El ritmo fue más acelerado en el período 1993-2003: aproximadamente 0,12″ por año. Existe elevada confianza de que el ritmo del aumento del nivel del mar observado se ha incrementado del siglo XIX al XX. El aumento total estimado del siglo XX es 6,69″.

[a] Fuente: ipcc Intergovernmental panel on climate change `http://www.ipcc.ch/` y ecodes `http://www.ecodes.org/`

- **Traducción de las unidades de longitud.** Tal vez ustedes conocen la relación que existe entre pulgadas y centímetros. Pero si no la conocen, pueden tratar de interpretar la siguiente información.

  Jugando con las opciones de Word, vimos que el programa se puede configurar para que las longitudes (márgenes, tamaños de página, etc.) vengan expresadas en pulgadas (″) o bien en centímetros (cm). Las siguientes capturas de pantalla muestran las dimensiones de los distintos tamaños de hoja, tal como los muestra Word si se elige que utilice pulgadas o centímetros.





a) ¿Cómo puede usarse la información de estas imágenes para traducir a centímetros las medidas que en el texto aparecen en pulgadas?

b) ¿Cuántos centímetros aumentó el nivel medio del mar entre los años 1993 y 2003?

c) ¿Cuantos centímetros aumentó entre 1961 y 1993?

d) ¿Cuál fue el aumento promedio por año del nivel medio del mar entre 1961 y 1993?

e) Un alumno, que respondió las preguntas anteriores, pasó todas las pulgadas a centímetros y luego realizó los cálculos. Un compañero suyo trabajó con las pulgadas y luego convirtió las respuestas a centímetros. ¿Cuál de las dos estrategias eligirían y por qué?

f) Tal vez lo más útil sería programar el traductor del navegador de Internet para que cuando pase un texto de inglés a castellano, también convierta las medidas que vienen dadas en pulgadas a centímetros. ¿Qué fórmula pueden proponer para que haga esta transformación con cualquier medida en pulgadas que aparezca en el texto?

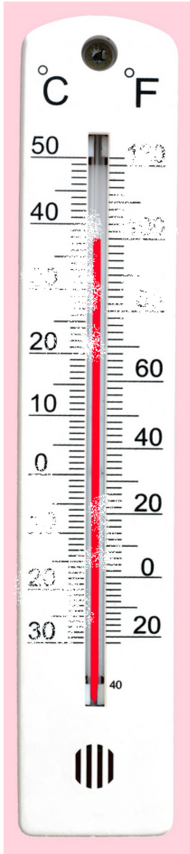
- **Traducción de las unidades de temperatura.** En este caso no pudimos recurrir a Word. Pero en la misma página aparecía esta foto de un termómetro que puede medir la temperatura tanto en la escala Fahrenheit como en la escala Centígrado. Lamentablemente la nitidez de la foto no es clara y solo se ven algunos números.

  a) ¿Cómo puede usarse la información de esta imagen para traducir a grados centígrados (°C) las temperaturas que en el texto aparecen en grados fahrenheit (°F)?

  b) ¿Cuántos °C disminuiría la temperatura media, sin la presencia de los gases de efecto invernadero?

  c) Deduzcan, de la información del texto, cuál es la temperatura media actual de la superficie terrestre y exprésenla en °C.

  d) ¿Qué fórmula pueden proponer para que el traductor del navegador de Internet haga la transformación de °F a °C cada vez que traduzca un texto del inglés al castellano?



Problema 6 Escriban la fórmula de una función que a cada longitud expresada en centímetros la devuelva expresada en pulgadas.

Problema 7 Escriban la fórmula de una función que a cada temperatura expresada en centígrados la devuelva expresada en grados Fahrenheit.

Problema 8 Daniel y Anders estaban en el laboratorio y tuvieron un diálogo:
–Oye, Anders –preguntó Daniel–, ¿podrías decirme a qué temperatura está esa muestra de nitrógeno?
Anders consultó un termómetro y su respuesta fue simplemente un número. Daniels insistió:
–Necesito que me aclares si tu respuesta es en grados Celsius o en grados Fahrenheit.
–No –advirtió Anders– no hace falta aclararlo.

¿A qué temperatura estaba la muestra de nitrógeno?

Problema 9 Metros (m), pies (ft) y yardas (yd) son distintas unidades de longitud[2]. La tabla 1.1 describe la equivalencia entre metros y pies. La tabla 1.2 describe la equivalencia entre pies y yardas.

m	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1	2	3	4	5
ft	0,33	0,66	0,98	1,31	1,64	1,97	2,30	2,62	2,95	3,28	6,56	9,84	13,12	16,40

Tabla 1.1: metros-pies

[2] La abreviatura "ft" para pies viene del inglés: feet=pies.

ft	1	2	3	4	5	6	7	8	9
yd	0,33	0,67	1	1,33	1,67	2	2,33	2,67	3

Tabla 1.2: pies-yardas

a) Encuentren una función que transforme longitudes expresadas en metros a yardas y escriban su fórmula.

b) Escriban la fórmula de una función que transforma yardas en pulgadas. ¿Qué información no incluida en el enunciado de este problema necesitarán?

c) Anders dice que la Tabla 1.1 está mal hecha porque si grafica los puntos estos no quedan estrictamente alineados. Sin embargo, la tabla está tomada de una página seria de Internet. ¿Tiene razón Anders? ¿Es confiable la tabla? Esto es una discusión. Escriban una opinión con algún argumento que permita defenderla.

Funciones lineales y ecuaciones de rectas

Problema 10 Un auto sale de una ciudad que está sobre la Ruta Nacional 2, entre Buenos Aires y Mar del Plata. En la siguiente tabla se informa sobre la distancia a la que se encuentra de Buenos Aires en distintos momentos de su viaje. Se supone que el auto viaja siempre a la misma velocidad.

Viajó	Está a
30 minutos	95 km
60 minutos	140 km
120 minutos	230 km

a) ¿Es cierto que a las tres horas de salir está a 320 km de Buenos Aires?

b) ¿A qué distancia de Buenos Aires estará a las tres horas y media de haber salido?

c) ¿A qué distancia de Buenos Aires se encuentra la ciudad de donde partió?

d) Realicen un gráfico que represente la distancia del auto a Buenos Aires a medida que transcurre el tiempo de viaje. Justificar.

e) ¿A qué velocidad viaja el auto?

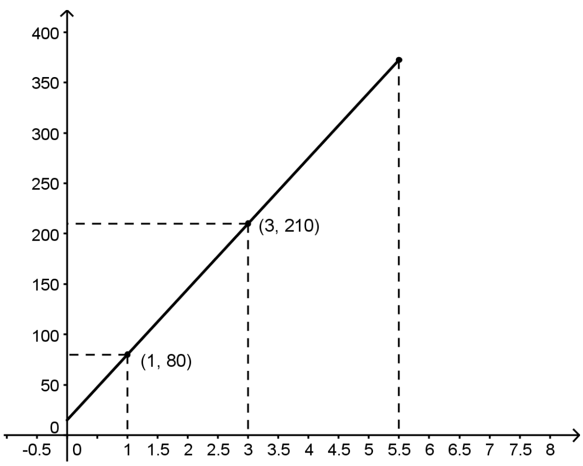
f) Propongan una fórmula que permita calcular la distancia del auto a Buenos Aires en función del tiempo transcurrido.

g) Otro auto parte desde otra ciudad que está en la ruta entre Buenos Aires y Mar del Plata, ubicada a 10 km de Buenos Aires. Este auto también viaja siempre a la misma velocidad: 120 km/h. ¿Se van a cruzar estos dos vehículos? En caso afirmativo, ¿en dónde y en qué momento?

h) Si este último auto hubiese partido a una velocidad de 95 km/h, ¿se habría cruzado con el primero? En caso afirmativo, ¿en dónde y en qué momento?

i) Realicen, en un mismo sistema de ejes, tres gráficos de manera que cada uno represente la distancia de cada uno de los autos a Buenos Aires en función del tiempo.

Problema 11 El siguiente gráfico representa la distancia de un auto a Buenos Aires en función del tiempo.



a) Definan una función (armen una fórmula que establezca una relación entre x e y y expresen un dominio) de manera tal que el gráfico anterior represente dicha función.

b) Armen una tabla de valores que representen distintos momentos del viaje y márquenlos en el gráfico:
   (i) El momento en que parte.
   (ii) Cuando pasaron 2 horas y media de viaje.
   (iii) Cuando se encuentra a 300 km de Buenos Aires.
   (iv) Cuando pasaron 4 horas de viaje.
   (v) Cuando se encuentra a 230 km de Buenos Aires.
   (vi) El momento en que finaliza el viaje. ¿Llega a Mar del Plata?

Problema 12 Tres compañías de telefonía celular ofrecen distintos planes para el nuevo **Mobicón Esmarfón**. Las tres compañías ofrecen un plan de 200 minutos de llamadas, 400 SMS y navegación libre dentro del abono.

La compañia 1: Regala el teléfono y cobra un abono de $310 por mes.

La compañia 2: Cobra el teléfono $1000 y un abono mensual de $220.

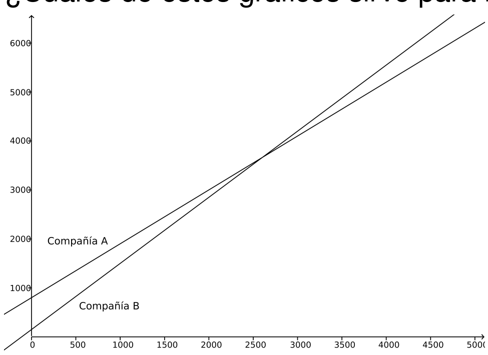
La compañia 3: Cobra el teléfono $500 da tres meses de abono gratuito y a partir del cuarto mes cobra el abono $270.

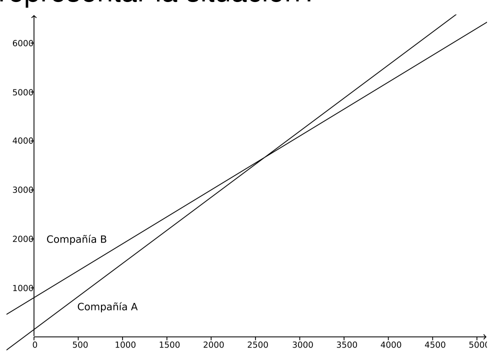
a) ¿Cuál compañía te conviene elegir si tenés la expectativa de cambiar el aparato en un año? Un año es el plazo mínimo que se contrata el servicio.
b) ¿Cuál compañía te conviene elegir si tenés la expectativa de cambiar el aparato en dos años y estimás que todas las compañías van a hacer un reajuste en las tarifas de un 25 % al cabo de 12 meses?
c) ¿Cambia la decisión si la expectativa de reajuste de tarifa es del 15 % al cabo de 12 meses?
d) ¿Cuál plan creés que elegiría la mayoría de la gente? Ver [4] capítulo 3.

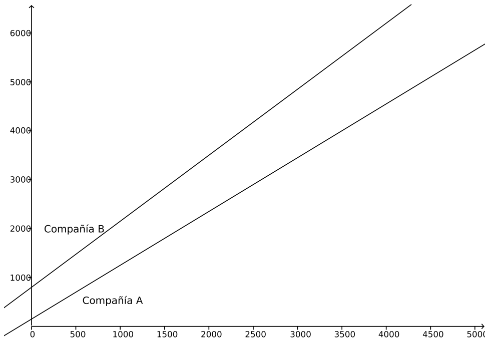
Problema 13 Roberto está por hacer un viaje y está averiguando para alquilar un auto. Averiguó en dos compañías:

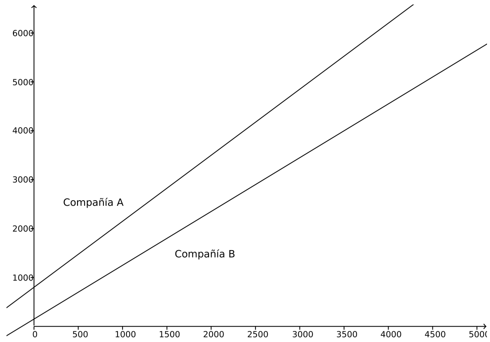
- La compañía A le cobra $\$800$ fijos y $\$1{,}10$ por kilómetro recorrido.
- La compañía B le cobra $\$150$ fijos y $\$1{,}35$ por cada kilómetro recorrido.

a) Si estima que va a recorrer 1000 Km, ¿qué compañía le conviene contratar? ¿Y si recorriera 5000 Km?
b) Armen una fórmula correspondiente a la compañía A y otra correspondiente a la compañía B, que represente el costo del alquiler en función de los kilómetros recorridos. ¿A partir de qué kilometraje le conviene cada compañía?
c) ¿Cuáles de estos gráficos sirve para representar la situación?







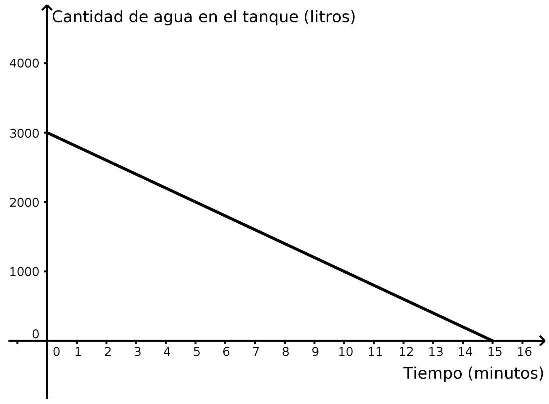


d) Si finalmente Roberto eligió la compañía A y cuando terminó el viaje el costo del alquiler fue de $\$3355,30$, ¿cuántos kilómetros recorrió?

Problema 14 El gráfico representa el proceso de vaciado de un tanque de agua.

a) ¿Qué cantidad de agua tenía el tanque cuando empezó a vaciarse?

b) ¿Cuánto tardó en vaciarse?



c) ¿Cuántos litros por minuto salían del tanque mientras se vaciaba?

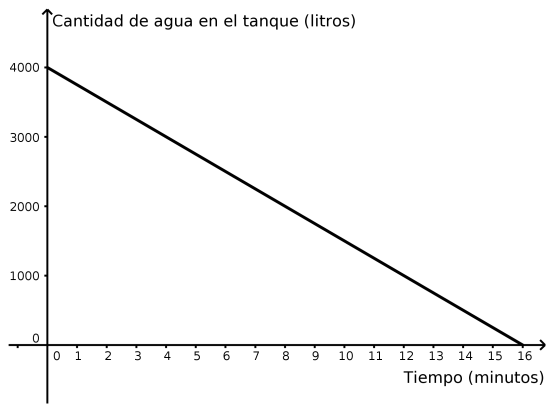
d) Marquen sobre el gráfico el punto que representa el momento en que el tanque tenía 2000 litros. ¿Cuánto tiempo había transcurrido desde que comenzó a vaciarse?

e) Escriban una fórmula que calcule la cantidad de agua que había en el tanque a los x minutos de haber comenzado a vaciarse.

Problema 15 El gráfico representa el proceso de vaciado de un tanque de agua.

a) ¿Qué cantidad de agua tenía el tanque cuando empezó a vaciarse?

b) ¿Cuánto tardó en vaciarse?



c) ¿Cuántos litros por minuto salían del tanque mientras se vaciaba?

d) Marquen sobre el gráfico el punto que representa el momento en que el tanque tenía 3000 litros. ¿Cuánto tiempo había transcurrido desde que comenzó a vaciarse?

e) Escriban una fórmula que calcule la cantidad de agua que había en el tanque a los x minutos de haber comenzado a vaciarse.

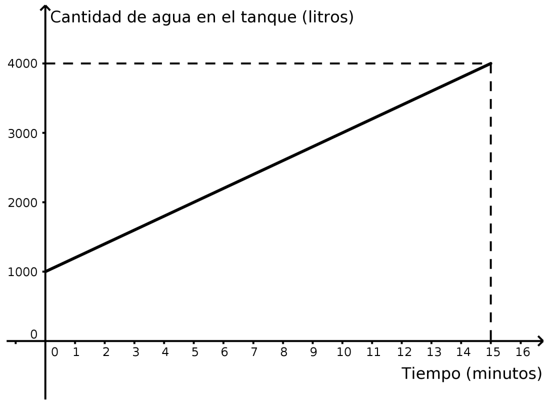
Problema 16 El gráfico representa el proceso de llenado de un tanque de agua a partir del momento en que se abrió una canilla.

a) ¿Qué cantidad de agua tenía el tanque cuando se abrió la canilla y empezó a llenarse?

b) ¿Cuántos litros por minuto entraron al tanque mientras se llenaba?

c) Marquen sobre el gráfico el punto que representa el momento en que el tanque tenía 1500 litros. ¿Cuánto tiempo había transcurrido desde que comenzó a llenarse?

d) Escriban una fórmula que calcule la cantidad de agua que había en el tanque a los x minutos de haber comenzado a llenarse.



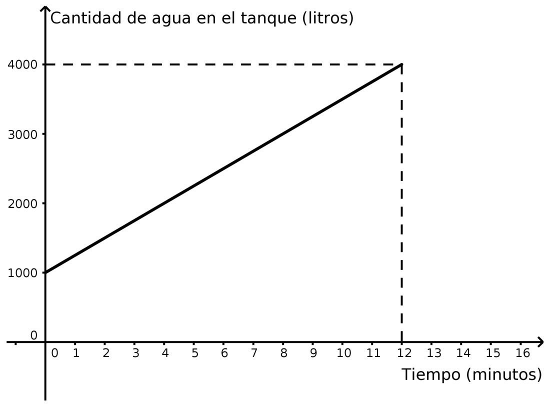
Problema 17 El gráfico representa el proceso de llenado de un tanque de agua a partir del momento en que se abrió una canilla.

a) ¿Qué cantidad de agua tenía el tanque cuando se abrió la canilla y empezó a llenarse?

b) ¿Cuántos litros por minuto entraron al tanque mientras se llenaba?

c) Marquen sobre el gráfico el punto que representa el momento en que el tanque tenía 1750 litros. ¿Cuánto tiempo había transcurrido desde que comenzó a llenarse?

d) Escriban una fórmula que calcule la cantidad de agua que había en el tanque a los x minutos de haber comenzado a llenarse.

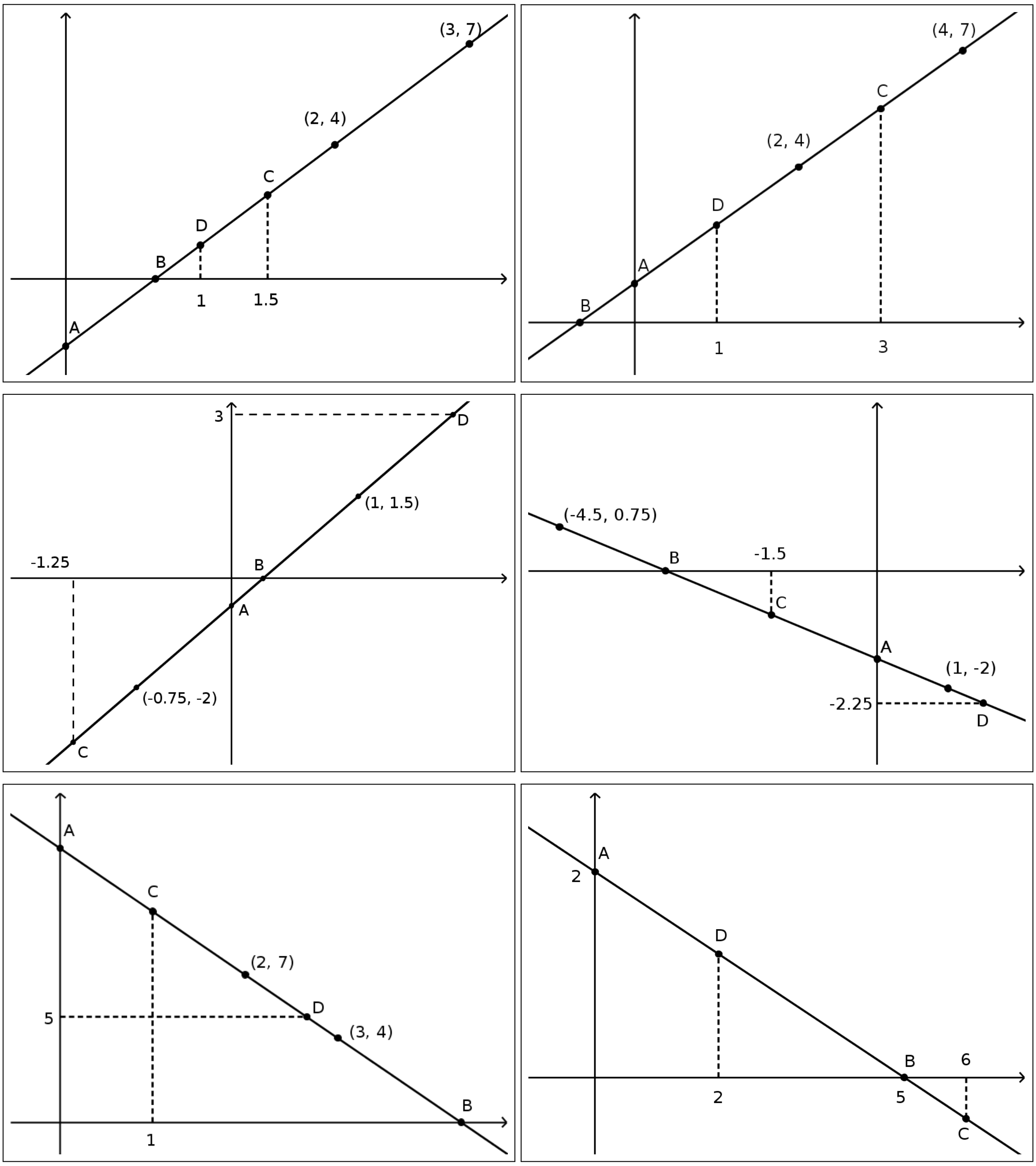


Problema 18 () Encuentren (deduzcan, calculen) la ecuación de una recta que pasa por los puntos $(50, 10)$ y $(104, 40)$.

Problema 19 Para cada uno de los siguientes gráficos:

a) Armen la ecuación de la recta.

b) Den las coordenadas de los puntos A, B, C y D.



Problema 20 Hallen, en cada caso, la función lineal cuyo gráfico contiene a los puntos que se indican:

a) $(2; 5)$ y $(4; 9)$

b) $(-3; 2)$ y $(-1; 3)$

c) $\left(\frac{1}{2}; 2\right)$ y $\left(\frac{5}{3}; \frac{7}{2}\right)$

d) $(-1; 3)$ y $(2; 0)$

e) $(-2; 3)$ y $(4; 3)$

f) $(1; 4)$ y $(1; 5)$

Problema 21 Hallen la ecuación de una recta que posea las características que se indican en cada uno de los siguientes casos.

a) Su pendiente es 4 y contiene al punto $(-1; -2)$.

b) Su ordenada al origen es 5 y contiene al punto $\left(\frac{2}{3}; 1\right)$.

c) Contiene a los puntos $(2;1)$ y $(5;-1)$.
d) Interseca al eje de las abscisas en $x=-2$ y contiene al punto $\left(4;-\frac{4}{5}\right)$.
e) Su pendiente es $\frac{2}{3}$ y contiene al punto $(3;-1{,}5)$.
f) Su pendiente es 0 y contiene al punto $(-5;-2)$.

Unidad 2: Modelos cuadráticos

Áreas, perímetros y movimientos

Estudio de situaciones

Problema 1 ( ) Una soguita que mide 10 cm está unida por sus extremos. Sosteniéndola con cuatro dedos se puede tensar para formar distintos rectángulos.

a) Hagan una lista de rectángulos que se pueden armar, describiéndolos mediante las medidas de sus lados.

b) Exploren el archivo **Soga.ggb** moviendo el deslizador para mostrar distintos rectángulos posibles e intenten ver si los que propusieron en el punto anterior efectivamente pueden construirse.

c) Investiguen, mediante los recursos de GeoGebra que consideren convenientes, cómo varía el área del rectángulo en función de la medida de uno de sus lados.

   Describan la función mediante:

   - Una tabla.
   - Un gráfico.
   - Una fórmula.

Problema 2 Otra soguita mide 25 cm y está unida por sus extremos, al igual que la anterior.

a) Hagan una lista de rectángulos que se pueden armar, describiéndolos mediante las medidas de sus lados.

b) Consideren la variación del área del rectángulo en función de la medida de uno de sus lados.

   Describan la función mediante:

   - Una tabla.
   - Un gráfico.
   - Una fórmula.

c) ¿Es posible armar un rectángulo de área $37{,}5$ cm^2? ¿Y uno de área 45 cm^2?

d) Si el área de un rectángulo armado con la soguita mide 20 cm^2, ¿cuáles son las medidas de sus lados?

Problema 3 ( )Este problema se desarrollará a partir de una aplicación creada con GeoGebra. Pueden acceder a la misma en el Campus[3].

[3] Este link conduce a `http://campusvirtual.unm.edu.ar/moodle/login/index.php`

a) Abran la aplicación LaPelotita.html y exploren un poco su funcionamiento. ¿Qué observan?

b) Dentro de un rato les propondremos responder una pregunta como la siguiente:

¿A qué altura estará la pelotita .... segundos después de su lanzamiento?

Como pueden observar a la pregunta le falta un dato. Ese dato se los daremos después. Pero, cuando llegue ese momento, ya no podrán usar la aplicación para lanzar pelotitas. Ahora disponen de un tiempo para realizar todas las investigaciones que les parezcan convenientes, de modo de estar preparados para responder, cuando ya no dispongan de la aplicación.

c) Les proponemos que constesten a las siguientes preguntas referidas al fenómeno observado durante el experimento.

- ¿A qué altura está a los $0{,}5$ s? ¿Existe otro instante en el que está a la misma altura?
- ¿A qué altura está a los $0{,}7$ s? ¿Existe otro instante en el que está a la misma altura?
- ¿Existe alguna altura que la palelotita alcanza en un único instante?
- ¿Alcanza la pelotita los 7 m de altura? ¿En qué momento?
- ¿Alcanza la pelotita los 5 m de altura? ¿En qué momento?
- ¿Se mueve siempre a la misma velocidad?

Problema 4 La fórmula $-5(x-3)^2+45$ calcula la altura de una pelotita como la del problema anterior.

a) ¿A qué altura está a 1 s de haber sido lanzada? ¿Existe otro instante en el que está a la misma altura?

b) ¿A qué altura está a los 2 s? ¿Existe otro instante en el que está a la misma altura?

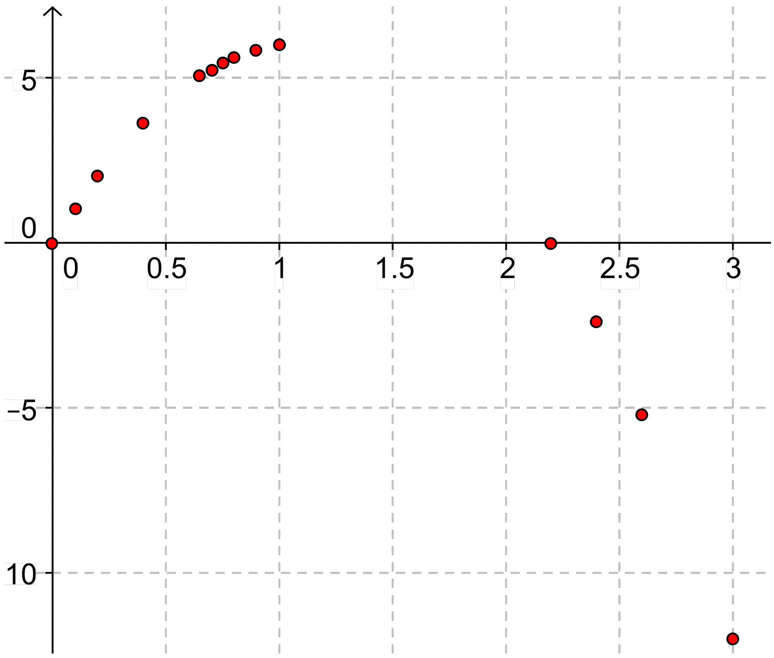
c) ¿Existe alguna altura que la palelotita alcanza en un único instante?

d) ¿Alcanza la pelotita los 40 m de altura? ¿Y los 50? ¿En qué momentos?

e) ¿En qué momento alcanza su altura máxima? ¿Y en qué instante?

Problema 5 En el mismo **Problema 3** se confeccionó una tabla con datos tomados en forma experimental, a partir de la aplicación de la pelotita. Acá reproducimos la tabla con algunos datos.

Tiempo [s]	Altura [m]
0	0
0.1	1.05
0.2	2
0.4	3.6
0.65	5.04
0.7	5.25
0.75	5.44
0.8	5.6
0.9	5.85
1	6
2.2	0
2.4	-2.4
2.6	-5.2
3	-12



a) Identifiquen en la tabla los instantes en los que la pelotita estaba subiendo y los instantes en los que estaba bajando.

b) Cuando graficamos los puntos en GeoGebra obtuvimos el gráfico que se ve al lado de la tabla. Algunos sugirieron que podía corresponder a una función cuadrática. Sabiendo que estas funciones responden a una ecuación de la forma

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

elijan puntos de la tabla y determinen la ecuación de la función cuadrática que contiene a esos puntos.

c) Una vez obtenida la ecuación, verifiquen que funcione para otros puntos de la tabla.

Problema 6 En el **Problema 3** el cañón que disparaba la pelotita estaba a una cierta altura por encima del piso. En el sistema de referencia que veían en la aplicación de GeoGebra la posición del cañón era la “altura 0”.

a) ¿Cómo se modifica la ecuación que describe la altura de la pelotita en función del tiempo si consideramos que la “altura 0” está 3 m por debajo del lanzador?

b) ¿En qué momento estará la pelotita a 3 m del piso?

c) Realicen un gráfico de esta variante de la función y compárenlo con el de la función del **Problema 3**.

Trabajo con fórmulas y gráficos

Problema 7 Para cada una de las siguientes fórmulas (que corresponden a funciones cuadráticas):

a) hallen 5 pares de puntos simétricos;
b) hallen las coordenadas del vértice.

- $f(x) = 3(x-2)^2 - 27$
- $g(x) = -2(x+1)(x-3)$

Problema 8 Para cada una de las siguientes fórmulas (que corresponden a funciones cuadráticas) hallen las coordenadas del vértice.

- $f(x) = \frac{1}{2}(x+3)^2 - 2$
- $g(x) = -3(x-4)(x+\frac{3}{2})$

Problema 9 Realicen un gráfico aproximado de todas las funciones del **Problema 7** y del **Problema 8** que incluya el vértice, las raíces (si existen) y dos puntos simétricos que no sean las raíces.

Problema 10 Los puntos $A = (-2;-3)$ y $B = (1;5)$ pertenecen al gráfico de una función cuadrática.

a) Suponiendo que A es el vértice del gráfico, escribí las coordenadas de otro punto que pertenezca al mismo gráfico.
b) Suponiendo que B es el vértice del gráfico, escribí la fórmula de la función.

Problema 11 El punto $A = (-2;5)$ es el vértice del gráfico de una función cuadrática. Además se sabe que esa función tiene una raíz en $x = 3$.

a) Deducí el valor de la otra raíz.
b) Escribí la fórmula de la función.

Problema 12 () La ecuación de una misma función cuadrática se puede escribir de muchas formas equivalentes. Mostrar que las siguientes fórmulas corresponden a la misma función f.

a) $f(x) = 2(x-4)\cdot(x+\frac{1}{2})$
b) $f(x) = 2x^2 - 7x - 4$
c) $f(x) = 2(x-\frac{7}{4})^2 - \frac{81}{8}$

Problema 13 () Encuentren en cada caso, si es posible, la fórmula de una función cuadrática cuyo gráfico pase por los puntos dados.

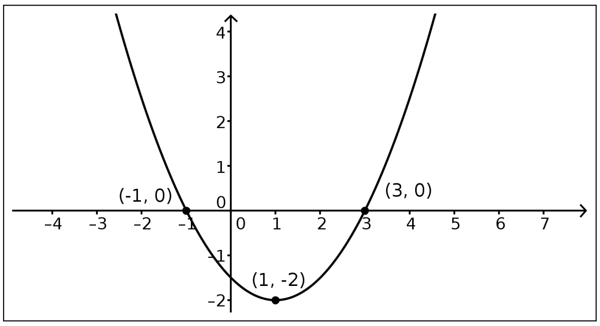
a) $A = (1,2)$, $B = (2,5)$ y $C = (5,-1)$.
b) $A = (1,2)$ y $B = (2,5)$
c)

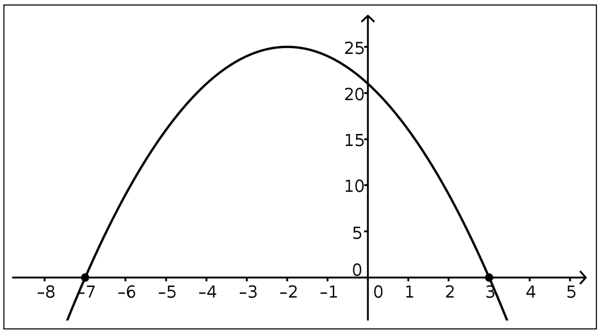
x	y
1	2
2	5
-1	-4

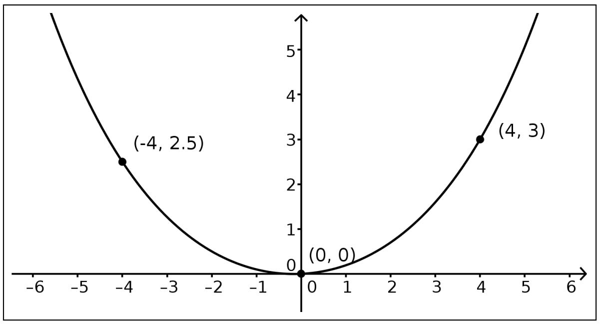
d)

x	y
1	2
-1	-4

Problema 14 Dados los siguientes gráficos, decidan si pueden corresponder a los gráficos de una función cuadrática. En caso afirmativo, encuentren una fórmula. En caso negativo, expliquen por qué.







Problema 15 Hallen las fórmulas de las funciones cuadráticas que cumplen con las siguientes características. Luego escriban todas las fórmulas en las tres formas posibles (canónica, factorizada y polinómica).

a) Su gráfico contiene a los puntos $(0; 2)$, $(1; 0)$ y $(4; 2)$.

b) Su coeficiente principal es -2 y su gráfico contiene a los puntos $(-1; 0)$ y $(3; 0)$.

c) Su coeficiente principal es 2 y sus raíces son -1 y 3.

d) Su coeficiente principal es $-1,5$ y su conjunto de negatividad es $(-3; \frac{1}{2})$.

Problema 16 Si el conjunto de positividad de una función cuadrática es $(-2; 3)$, ¿su coeficiente principal es positivo o negativo?

Propongan un valor posible para el coeficiente principal y calculen la fórmula de la función cuadrática que cumple con las condiciones descriptas anteriormente.

Vuelta a las situaciones

Problema 17 Una bolita de vidrio es lanzada hacia arriba desde 1 m de altura y con una velocidad de 15 m/s. Si la variable t representa el tiempo (medido en segundos), la altura (en metros) a la que estará la bolita en cada instante viene dada por la fórmula

$$f(t) = -5t^2 + 15t + 1$$

a) ¿A qué altura del piso estará la bolita 0,5 s después de ser lanzada?
b) ¿A qué altura estará 2 s después de ser lanzada?
c) ¿Se puede asegurar que la bolita estuvo ascendiendo durante los primeros dos segundos desde que fue lanzada?
d) Observen que, para esta función, es $f(0) = 1$. ¿Qué significa esta información en el contexto del problema?
e) Observen que $f(3) = 1$ y $f(4) = -19$ ¿Qué significan estos valores en el contexto del problema?
f) ¿Cuánto tarda la bolita en llegar al piso?

Problema 18 Una bolita de vidrio es lanzada hacia arriba desde 2 m de altura y se sabe que a los 4 y a los 9 segundos se encuentra a 146 m de altura. Armen la fórmula de la función cuadrática que modeliza la situación y respondan.

a) ¿A qué altura del piso estará la bolita $1,5$ s después de ser lanzada?
b) ¿A qué altura estará 13 s después de ser lanzada?
c) ¿Se puede asegurar que la bolita estuvo ascendiendo durante los primeros 7 segundos desde que fue lanzada?
d) Observen que, para esta función, es $f(0) = 2$. ¿Qué significa esta información en el contexto del problema?
e) ¿Cuál es la altura máxima a la que llega la bolita?
f) ¿Cuánto tarda la bolita en llegar al piso?

Problema 19 En una isla se introdujo una cierta cantidad de abejas para estudiar su evolución. La función $f(x) = -20x^2 + 360x + 1000$ permite calcular la cantidad de abejas que hubo en la isla a los x días de haberlas introducido.

a) ¿Qué día la población de abejas fue mayor?
b) ¿Cuál es la mayor cantidad de abejas que llegó a haber en la isla?
c) ¿Cuántas abejas hubo en la isla a los 15 días?
d) ¿Se extingió en algún momento la población de abejas? ¿Cuándo?
e) ¿Qué cantidad de abejas se introdujeron en la isla? ¿Qué otro día hubo la misma cantidad?
f) ¿Qué día hubo 2440 abejas?

Problema 20 En una isla se introdujo una cierta cantidad de abejas para estudiar su evolución. Se sabe que la población tuvo la mayor cantidad de abejas a los 11 días de haber comenzado el estudio, que esa cantidad fue de 4410 abejas y que se extinguió a los 32 días. Suponiendo que la evolución de la población se comporta según un modelo cuadrático, armen la fórmula de la función que modeliza la situación y respondan.

a) ¿Cuántas abejas hubo en la isla a los 10 días?
b) ¿Qué cantidad de abejas se introdujeron en la isla? ¿Qué otro día hubo la misma cantidad?
c) ¿Qué día o qué días hubo 4250 abejas?

Problema 21 Un proyectil se lanza hacia arriba verticalmente. La fórmula

$$f(x) = -5(x-3)^2 + 80$$

calcula la altura del proyectil (medida en metros) en función del tiempo (medido en segundos). Utilizá los resultados hallados para responder:

a) ¿Cuál fue la altura máxima que alcanzó el proyectil?
b) ¿En qué momento la alcanzó?
c) ¿En qué momento cayó al piso?
d) ¿Desde qué altura fue lanzado?

Problema 22 Un proyectil se lanza hacia arriba verticalmente desde el piso y vuelve a caer al piso a los 17 segundos. Se sabe que a los 2 segundos de haber sido lanzado su altura fue de 150 metros. Hallen la fórmula de la función cuadrática que modeliza la situación y respondan.

a) ¿Cuál fue la altura máxima que alcanzó el proyectil?
b) ¿En qué momento la alcanzó?
c) ¿En qué otro momento estuvo a 2 m de altura?
d) ¿En qué momentos estuvo a $236{,}25$ m?

Problema 23 Miguel y Ernesto se asociaron para desarrollar un micro emprendimiento como técnicos de computadoras. Para decidir qué precio cobrarán por hora consultaron a un amigo economista. Teniendo en cuenta los costos fijos y la relación entre el precio que cobrarían por hora y la cantidad de trabajo que tendrían, el amigo les presenta la siguiente fórmula:

$$G = -20p^2 + 840p - 1600$$

que permite calcular la ganancia mensual en función del precio por hora.

a) Miguel propone cobrar $\$35$ por hora. ¿Cuánto ganarían en ese caso? ¿Existe otro precio por hora para el cual obtendrían la misma ganancia? ¿Cuál?
b) ¿Es posible obtener una ganancia de $\$4800$? ¿y de $\$8200$? ¿Por qué?
c) Ernesto propone aumentar la ganancia al máximo posible. ¿A qué precio deberían cobrar la hora? ¿Cuál sería esa ganancia?
d) ¿Cuáles son los precios que podrían cobrar sin dejar de obtener ganancia?

Unidad 3: Modelos exponenciales

Autos usados, radiación y bacterias

Variaciones porcentuales

Problema 1 El precio de un automóvil usado disminuye con el tiempo, de manera que cada año cuesta el 15 % menos de lo que costaba el año anterior. Consideren que un auto determinado cuesta hoy $100000.[4]

a) ¿Cuánto costará dentro de un año? ¿Cuánto costará dentro de dos años?
b) ¿Cuánto estiman que costará dentro de 100 años? ¿Y dentro de 250 años?
c) Escriban una fórmula que permita calcular el precio del auto en función del tiempo. Determinen el dominio y grafiquen la función.
d) Un comprador tiene ahorrados $38000. ¿Cuánto tiempo debería esperar, como mínimo, para poder comprar ese auto?

Problema 2 Siempre que se compra un auto se paga un monto fijo por su transferencia. Suponiendo que ese monto fijo es de $5000, vuelvan a resolver todos los ítems del problema anterior teniendo en cuenta el costo de compra del automóvil (que incluye el gasto de transferencia) en lugar de su valor.

Problema 3 A principio de año el precio de un litro de gaseosa es de $15. Se estima que la variación porcentual de su precio será del 2 % mensual.

a) ¿Cuál será su precio al cabo de un mes? ¿Y al cabo de tres meses? ¿Y al cabo de siete?
b) Ricardo y Rubén necesitan saber cuál será el precio de la gaseosa en octubre. Ricardo calculó que será $\$18,28$ y Ruben $\$18$. ¿Qué cálculo hizo cada uno? ¿Cuál de los dos precios es el correcto?
c) ¿Es verdad que la inflación anual de este producto fue del 24 %? ¿Por qué?
d) Armen una fórmula que permita calcular el precio de la gaseosa para cada mes del año.
e) Ingresen la fórmula en GeoGebra y verifiquen que la curva pasa por los puntos:

$$(\underbrace{numero\ de\ mes}_{x}\,;\underbrace{precio\ de\ la\ gaseosa}_{y})$$

[4]Este problema, junto con los **Problema 7**, **Problema 14**, **Problema 17** y **Problema 18** están tomados del libro [9].

Problema 4 A principio de año el precio de un producto era de $\$35$ y durante los primeros doce meses sufrió un incremento acumulativo del 3 % mensual.

a) Escribí una fórmula que calcule el precio del producto para cada tiempo t (medido en meses) a partir del comienzo del año.
b) ¿Cuál fue el precio del producto cuando transcurrieron seis meses desde el comienzo del año?
c) ¿De cuánto fue el porcentaje total anual correspondiente al incremento del precio?
d) Suponiendo que el incremento del precio sigue siendo de un 3 % mensual acumulativo, ¿cuánto tiempo tiene que transcurrir para que el producto duplique su precio original?

Problema 5 Una sustancia radiactiva pierde el 3 % de su masa cada 2 años. Al momento de comenzada la observación la sustancia pesa 7 kg.

a) Hallá la función que determina la cantidad de masa en función del tiempo (en años).
b) Calculá cuál es el porcentaje de masa que pierde por año y cuál el que pierde por década.
c) ¿Después de cuánto tiempo su masa se reduce a la mitad?

Problema 6 Se administraron 70 miligramos de cierto medicamento a un paciente. La cantidad de miligramos restantes en el torrente sanguíneo del paciente disminuye a la tercera parte cada 5 horas.

a) ¿Cuál es la fórmula de la función que representa la cantidad del medicamento restante en el torrente sanguíneo del paciente en relación con el tiempo transcurrido medido en horas?
b) ¿Cuántos miligramos del medicamento quedan en el torrente sanguíneo del paciente después de 3 horas?
c) ¿Después de cuánto tiempo quedará solo 1 miligramo del medicamento en el torrente sanguíneo del paciente?

Problema 7 Lean el siguiente texto:

Decaimiento radiactivo

Durante toda su vida las plantas y animales incorporan a su organismo, a través del aire que respiran y de los alimentos que ingieren, distintos elementos presentes en la atmósfera. Entre ellos está el carbono. Toda concentración de carbono de la atmósfera tiene una parte estable (carbono 12 o C12) y una parte radiactiva (carbono 14 o C14).

¿Qué es un átomo radiactivo?

Un átomo radiactivo es un átomo cuyo núcleo puede transformarse espontáneamente, dando lugar a otro átomo más estable. El C14, por ejemplo, es un isótopo radiactivo del C12.

Vida media.

Cualquier concentración de C14 va decayendo (transformándose) hasta convertirse en nitrógeno. Esta desintegración lleva un tiempo y se produce de manera que el tiempo que le lleva a una concentración de material radiactivo reducirse a la mitad es siempre el mismo (uno distinto para cada material). Por ejemplo, 32 g de un material radiactivo tardará un tiempo en desintegrarse, hasta que solo queden 16 g. Luego tardará el mismo tiempo en desintegrarse hasta que queden 8 g y el mismo tiempo en desintegrarse hasta que queden 4 g, etc. Este tiempo se llama vida media del material radiactivo.

La cantidad de C14 presente en un organismo va decayendo, pero también es renovada continuamente mientras el organismo vive, de manera que su proporción de C14 es constante. Cuando el organismo muere, ya no renueva su proporción de C14. Mientras la cantidad de C12, permanece estable en él, el C14 continúa decayendo en función del tiempo. Los científicos han podido comprobar que la vida media del C14 es 5730 años, es decir, que la concentración de C14 se reduce a la mitad cada 5730 años.

a) Supongan que la concentración constante de C14 en el carbono presente en un organismo es cierto número K. Escriban la fórmula que permite calcular la concentración de C14 en dicho organismo, en función del tiempo (medido en años), a partir del momento en que el organismo muere.
b) Grafiquen la función.
c) Los investigadores que estudiaron las pinturas rupestres de las cuevas de Altamira pudieron medir la proporción de C14 (tal vez en las sustancias orgánicas de la pintura o en otros restos orgánicos hallados en las cuevas) y determinaron que solo quedaba el 20 % de la concentración inicial K. ¿Cómo pueden utilizar esta información para determinar la antigüedad de las pinturas?

Problema 8 En un experimento se calentó un líquido hasta alcanzar una temperatura de 95 °C. Inmediatamente después se lo dejó enfriar al aire libre. Al cabo de dos minutos su temperatura era de $87,5$ °C. Supongamos que su temperatura disminuye de forma exponencial y que tiende a una temperatura ambiente de 20 °C.

a) Escribí una fórmula que calcule la temperatura del líquido en cada instante t (medido en minutos).
b) ¿Cuál era la temperatura del líquido luego de transcurridos 6 minutos desde que comenzó a enfriarse?
c) ¿A partir de qué momento su temperatura se va a encontrar por debajo de los 25 °C?
d) ¿Cuál era el porcentaje en que disminuía la temperatura por cada minuto transcurrido?

Problema 9 En un experimento se calentó un líquido hasta alcanzar una temperatura de 85 °C. Inmediatamente después se lo dejó enfriar al aire libre. Al cabo de dos minutos su temperatura era de $74,5$ °C. Supongamos que su temperatura disminuye de forma exponencial y que tiende a una temperatura ambiente de 15 °C.

a) Escribí una fórmula que calcule la temperatura del líquido en cada instante t (medido en minutos).

b) ¿Cuál era la temperatura del líquido luego de transcurridos 4 minutos desde que comenzó a enfriarse?

c) ¿A partir de qué momento su temperatura se va a encontrar por debajo de los 20 °C?

d) ¿Cuál era el porcentaje en que disminuía la temperatura por cada minuto transcurrido?

Problema 10 Se sacó una botella con agua de una heladera que estaba a 5 °C. Luego de 7 minutos su temperatura era de 8 °C. Suponiendo que su temperatura aumenta de forma exponencial y que tiende a una temperatura ambiente de 25 °C.

a) Escribí una fórmula que calcule la temperatura del agua en cada instante t (medido en minutos).

b) ¿Cuál era la temperatura del agua luego de transcurridos 4 minutos desde que se sacó de la heladera?

c) ¿A partir de qué momento su temperatura se va a encontrar por encima de los 15 °C?

Características de las funciones

Problema 11 ( ) Uticen dos deslizadores a y b para graficar la función $f(x) = a \cdot b^x + 2$. Luego, muevan los deslizadores modificando los valores de a y de b, y analicen:

a) Para qué valores de a y de b la función resulta creciente y para cuáles decreciente.

b) Cuál es el valor de y por el cual nunca pasa el gráfico.

c) Para qué valores de a y de b los valores de la imagen de la función son mayores, y para cuáles menores, al valor establecido en el ítem anterior.

d) Qué *tipos de gráficos* pueden resultar, dependiendo de los valores de a y de b. (En el sentido de crecimiento, decrecimiento y posición.)

Problema 12 ( ) Grafiquen las siguientes funciones, haciendo que cada una tenga un color distinto para poder compararlas.

- $f(x) = 2 \cdot 3^x + 1$
- $g(x) = -3 \cdot 2^x + 1$
- $h(x) = 5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x - 1$
- $i(x) = 5 \cdot 2^{-x} - 1$
- $j(x) = -2 \cdot 3^x + 1$
- $k(x) = -3 \cdot 2^x - 1$

a) Para cada una de las funciones, identifiquen de qué *tipo de gráfico* se trata. Luego, identifiquen relaciones entre los coeficientes de las fórmulas y las características de su gráfico.

b) ¿Por qué coinciden los gráficos de las funciones h e i?

c) Expliquen, describiendo los gráficos, por qué es verdadera la afirmación “Los gráficos de las funciones f y j son simétricos”. ¿Cómo se puede explicar este hecho analizando las fórmulas?

d) Expliquen por qué, describiendo los gráficos, es verdadera la afirmación “El gráfico de la función g es el mismo que el de la función k, pero desplazado”. ¿Cómo se puede explicar este hecho analizando las fórmulas?

Construcción de fórmulas

Problema 13 ( ) La tabla muestra algunos datos que correspoden a una función cuya fórmula todavía no conocemos.

Utilicen todos los recursos de GeoGebra que consideren convenientes para:

a) Construir una curva que pase por todos los puntos de la tabla, configurando las escalas de los ejes para que todos los puntos resulten visibles.

b) Escribir la fórmula de una función f cuyo gráfico sea la curva del punto anterior.

c) Completar la tabla con los valores que faltan.

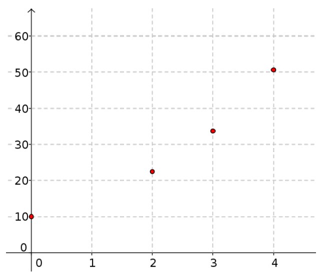
x	y
25	
30	729
50	
60	243
72	
90	81
100	
120	27

Problema 14 ( ) La figura muestra algunos puntos del gráfico de una función exponencial f.

a) Estimen, mirando el gráfico, el valor de $f(2,3)$.

b) Escriban la fórmula de una función f que se corresponda con el gráfico.

c) Calculen $f(2,3)$ y comparen con el punto a).

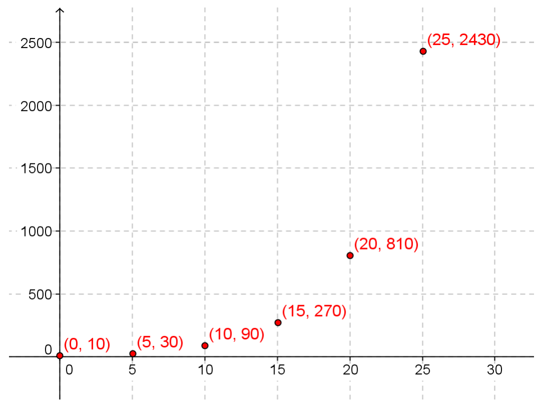


Problema 15 La figura muestra algunos puntos del gráfico de una función exponencial f.

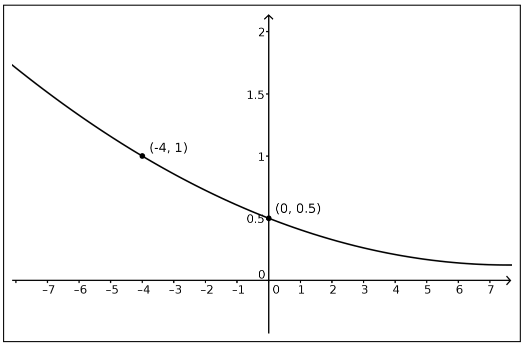
a) Estimen, mirando el gráfico, el valor de $f(23)$.

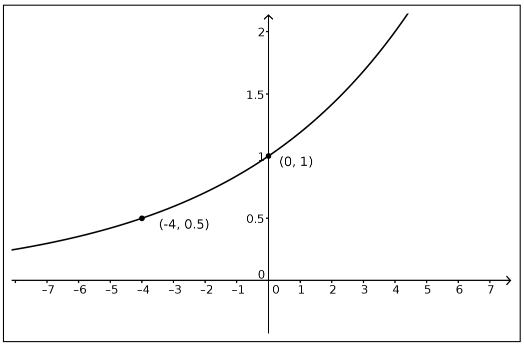
b) Escriban la fórmula de una función f que se corresponda con el gráfico.

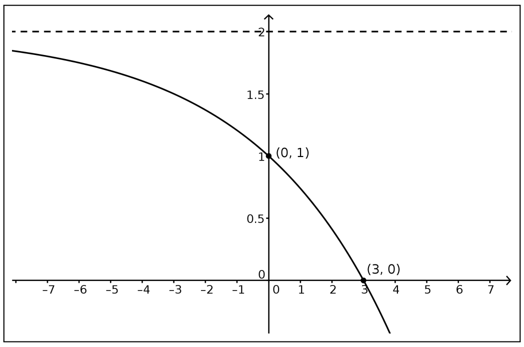
c) Calculen $f(23)$ y comparen con el punto a).



Problema 16 Dados los siguientes gráficos, decidan si pueden corresponder a los gráficos de una función exponencial. En caso afirmativo, encuentren una fórmula. En caso negativo, expliquen por qué.







Problema 17 En un laboratorio se está estudiando un tipo de bacterias que se reproducen por bipartición cada 15 minutos. Se inicia un campo de cultivo con una bacteria a las 9:00 horas. Mediante el microscopio, se observa que a las 11:45, el campo de estudio tiene llena la mitad de su capacidad.

a) ¿A qué hora se llenará el campo de cultivo?

b) ¿Cuántas bacterias habrá cuando el campo de cultivo esté lleno?

c) Escriban la fórmula de la función que describe este fenómeno y determinen su dominio.

Problema 18 La función que describe el número de bacterias en un cultivo para cada momento, después de iniciado el mismo viene dada por la fórmula:

$$f(t) = 5 \cdot 2^{\frac{t}{30}}$$

a) Construyan una tabla de valores y un gráfico para algunos valores válidos de t.

b) Interpreten el significado de los números 5, 2 y 30 que aparecen en la fórmula.

c) ¿Cuántas horas deberán transcurrir para que la población supere las 500000 bacterias?

Problema 19 El modelo que describe el crecimiento de una población de bacterias es:

$$C : [0; 11) \to \mathbb{R},\ C(t) = 6 \cdot 1{,}5^t + 2$$

donde t es el tiempo medido en horas y $C(t)$ es la cantidad de bacterias (medidas en miles).

a) ¿Cuál es la población inicial de bacterias?

b) ¿Cuál es la proporción por hora a la que crece la población? ¿Y la proporción diaria?

c) ¿En qué instante la población llega a ser 10 veces la población inicial?

d) Realizar un gráfico aproximado de la función para tiempos mayores a 11 sabiendo que luego de ese momento la población crece cada vez más lentamente.

Problema 20 El modelo que describe el crecimiento de una cantidad de dinero invertido en un banco es:

$$C : [0; 12) \to \mathbb{R},\ C(t) = 5000 \cdot 1{,}1^t$$

donde t es el tiempo medido en meses y $C(t)$ es la cantidad de dinero en pesos.

a) ¿Cuál es el monto inicial de la inversión?

b) ¿Cuál es el interés mensual que paga el banco? ¿Y el interés anual?

c) ¿En qué momento se triplica la inversión inicial?

Problema 21 Los siguientes datos, dados en forma coloquial, representan situaciones de comportamiento exponencial. Para cada uno:

- Realicen un gráfico aproximado que represente los datos.
- Construyan una fórmula que describa los datos y se ajuste al gráfico.

a) Inicialmente eran 100 y a la hora eran 180.

b) Nunca superan los 80000. Al inicio son 15000, pero luego de 5 unidades de tiempo son 50000.

c) En 1 vale 1500 y en 3, 7200.

Parte II

Estudio de funciones

Unidad 4: Derivada

Velocidades, razones de cambio y rectas tangentes

Velocidades

Problema 1 Dos automóviles comienzan a viajar por la misma ruta al mismo tiempo.

a) Del auto A se sabe que a la hora de haber partido se encontraba en el km 122, que a las 7 horas de haber partido se encontraba en el km 590 y que su velocidad fue constante durante todo el viaje.
   (i) ¿A qué velocidad viajó el auto A?
   (ii) ¿En qué km está la ciudad de donde partió?
   (iii) Si su viaje duró 8 horas, ¿hasta qué kilómetro llegó?
   (iv) ¿Es verdad que fue siempre a la misma velocidad?

b) Del auto B se sabe que su posición en la ruta en función del tiempo se puede calcular con la fórmula $g(x) = -2x^3 + 24x^2 + 100$.
   (i) ¿Es verdad que, al igual que el auto A, a la hora de haber partido el auto B se encontraba en el km 122 y que a las 7 horas de haber partido se encontraba en el km 590?
   (ii) ¿A qué velocidad viajó el auto B?
   (iii) ¿En qué km está la ciudad de donde partió?
   (iv) Si su viaje duró 8 horas, ¿hasta qué kilómetro llegó?
   (v) ¿Es verdad que fue siempre a la misma velocidad?

c) Para realizar comparando el comportamiento de ambos autos.
   (i) ¿Cuál fue la velocidad media de todo el viaje del auto B? ¿Y su velocidad media entre una hora y 7 horas luego de haber partido?
   (ii) Identificá intervalos de tiempo para los cuales la velocidad del auto A haya sido mayor a la velocidad del auto B y viceversa.
   (iii) ¿Existen instantes en los cuales ambos autos fueron a la misma velocidad? Si tu respuesta es afirmativa, decí aproximadamente en cuales. Si no, justificá por qué.
   (iv) ¿Cómo se podría calcular la **velocidad instantánea** del automovil B a las 4 horas de haber partido? ¿Y a las $6{,}5$ horas de haber partido?
   (v) Describí un procedimiento para calcular la **velocidad instantánea** del automovil B a las x_0 horas de haber partido.

Problema 2 Una pileta de natación que tiene una capacidad de 10000 litros se llena mediante una bomba. La siguiente tabla muestra la cantidad de litros de agua que había en la pileta para algunos momentos luego de haberse prendido la bomba.

minutos	litros
2	2000
5	2750

a) ¿A qué ritmo opera la bomba?

b) ¿Cuántos litros de agua tenía la pileta al momento de encender la bomba?

c) ¿Cuánto tiempo tardará en llenarse la pileta?

d) ¿Cuál es el gráfico que represente la cantidad de agua que habrá en la pileta en función del tiempo?

Problema 3 En otra ocasión, la bomba que se utilizaba para llenar la pileta del **Problema 2** se descompuso y funcionó de manera irregular hasta que dejó de andar. La fórmula $f(x) = -\frac{2}{3}x^3 + 20x^2 + 250x + 1000$ informa la cantidad de agua que había en la pileta (medida en litros) en función del tiempo (medido en minutos) desde que se prendió la bomba hasta el momento x_1 en que dejó de funcionar.

a) ¿Cuántos litros de agua tenía la pileta en el momento en que se encendió la bomba?

b) En el momento en que se encendió la bomba, ¿operaba a un menor o a un mayor ritmo que cuando funcionaba correctamente?

c) Identificá dos instantes en que la bomba operó a mayor ritmo y dos instantes en los cuales operó a menor ritmo de lo que debería haber operado.

d) ¿Es verdád que la bomba dejó de funcionar antes de los 30 minutos desde que se encendió?

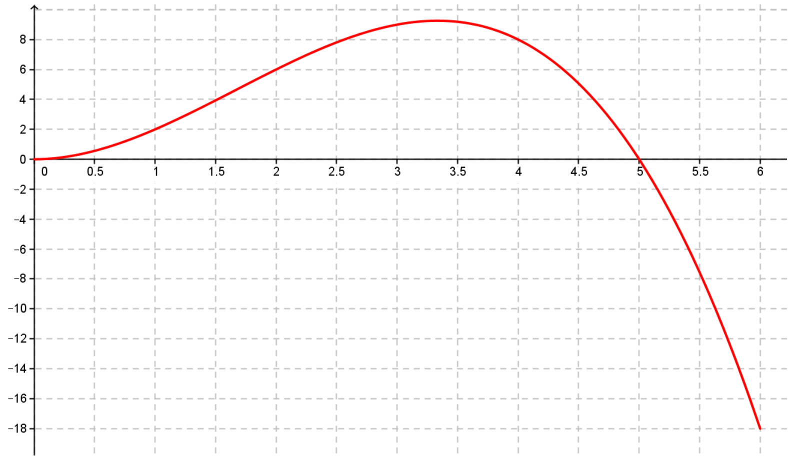
e) ¿Es verdad que a los 24 minutos de haberse encendido la bomba ya había dejado de funcionar? ¿Y a los 25?

f) ¿Cuál es el valor de x_1? Definí un dominio para la fórmula de manera que la función resultante sea correcta para el problema.

g) Calculá el ritmo medio al que operó al bomba desde el momento en que se prendió hasta que dejó de funcionar.

Problema 4 Considerando el **Problema 1**, calculá diez velocidades instantáneas del auto *B* de manera que te permitan trazar un gráfico aproximado de la función que describe la velocidad instantánea del automóvil en cada instante x. Recordá que del auto *B* se sabe que su posición en la ruta en función del tiempo se puede calcular con la fórmula $g(x) = -2x^3 + 24x^2 + 100$.

Problema 5 Maxi sale de su casa a dar un paseo en bicicleta. El gráfico muestra la posición de Maxi respecto de su casa (medida en kilómetros) en función del tiempo (medido en horas).



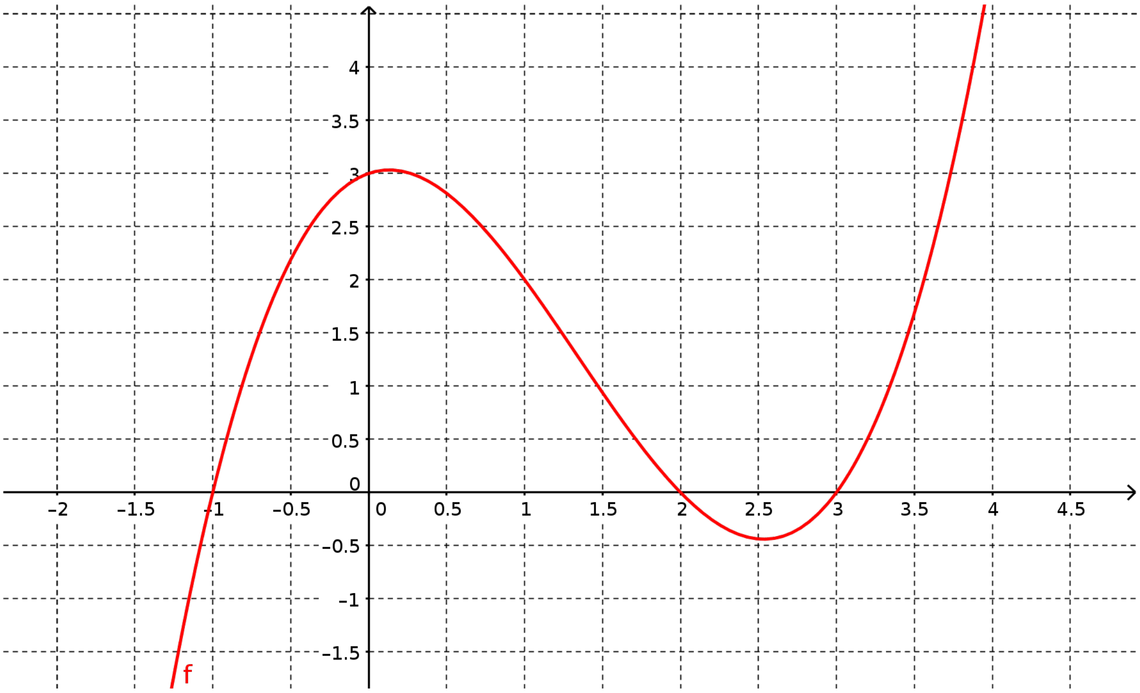
Observá el gráfico y respondé las siguientes preguntas:

a) ¿En qué intervalos de tiempo Maxi se alejaba de su casa y en cuáles se acercaba?
b) ¿En qué instantes su velocidad fue 0?
c) ¿En qué intervalos de tiempo su velocidad fue positiva y en cuáles fue negativa? ¿Qué interpretación tiene en este contexto una velocidad negativa?
d) Buscando coherencia con las respuestas anteriores, dibujá a mano un gráfico aproximado de una función que represente la velocidad en función del tiempo.
e) La función que describe la posición de Maxi en función del tiempo responde a la fórmula $f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{5}{2}x^2$. Determiná la fórmula de la función derivada f'.
f) Volvé a analizar las preguntas anteriores considerando la información que brinda $f'(x)$.

Rectas tangentes

Problema 6 El gráfico mostrado corresponde a la función $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 2x^2 + \frac{1}{2}x + 3$.

a) Con una regla, de manera aproximada y sobre el gráfico de la función, trazá en cada caso una recta tangente que cumpla con lo pedido.
   (i) Su pendiente sea positiva y su ordenada al origen positiva.
   (ii) Su pendiente sea positiva y su ordenada al origen negativa.
   (iii) Su pendiente sea negativa y su ordenada al origen positiva.
   (iv) Su pendiente sea negativa y su ordenada al origen negativa.
   (v) Su pendiente sea 2.
   (vi) Su pendiente sea -2.
   (vii) Su pendiente sea $\frac{1}{2}$.
   (viii) Su pendiente sea $-\frac{1}{2}$.
b) Para cada una de las rectas marcadas:
   - indicá las coordenadas de su punto de tangencia;
   - calculá de manera analítica su ecuación;
   - compará el gráfico de la ecuación obtenida con el trazado originalmente.



Problema 7 Para cada caso, calculá las rectas tangentes a los graficos de las funciones en los valores indicados.

a) $f(x) = 3x^2 + 2x - 3$ en $x_0 = -1$, $x_0 = 0$ y $x_0 = 3{,}5$.
b) $g(x) = -x^2 + 2x - 5$ en $x_0 = x_v$ (x del vértice).
c) $h(x) = 3x^3 - \frac{3}{4}x^2 + 2$ en $x_0 = -2$, $x_0 = 1$ y $x_0 = \frac{1}{2}$.
d) $i(x) = -2x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 3x - 5$ en los puntos máximos y/o mínimos de la función.

Problema 8 Encuentrá los extremos locales de cada una de las siguientes funciones. ¿Son máximos o mínimos locales? ¿Cómo lo pueden decidir?

a) $f(x) = \frac{1}{5}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - x + 1$
b) $f(x) = -\frac{1}{5}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x - 1$
c) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x$

Problema 9 Para la función $f(x) = -x^3 + 2x^2 - x + 1$, calculá la recta tangente a su gráfico que posee la mayor pendiente.

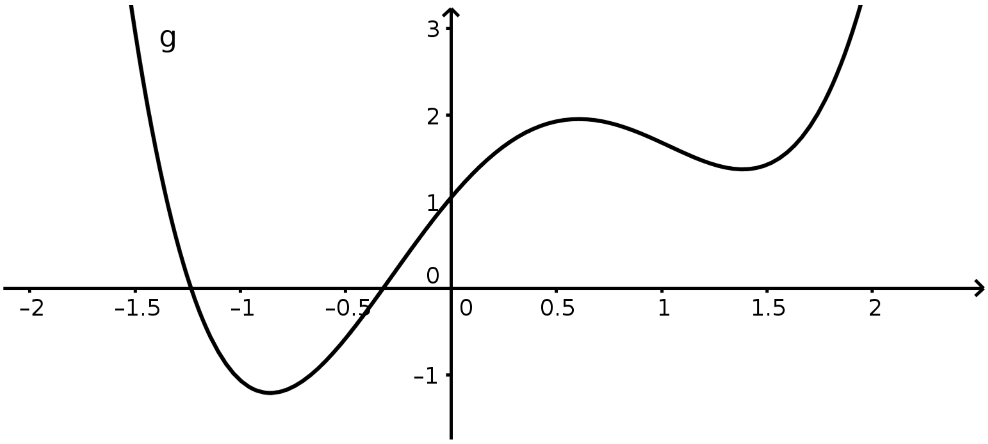
¿Es verdad que no existe una recta tangente al gráfico de la función que posea la menor pendiente?

Problema 10 Hallá el $I^{\uparrow}$, el $I^{\downarrow}$, los extremos (indicando si son relativos o absolutos) de cada función y los puntos donde la recta tangente al gráfico de la función tiene mayor o menor pendiente posible. Para las funciones que incluyen senos, describilos verbalmente.

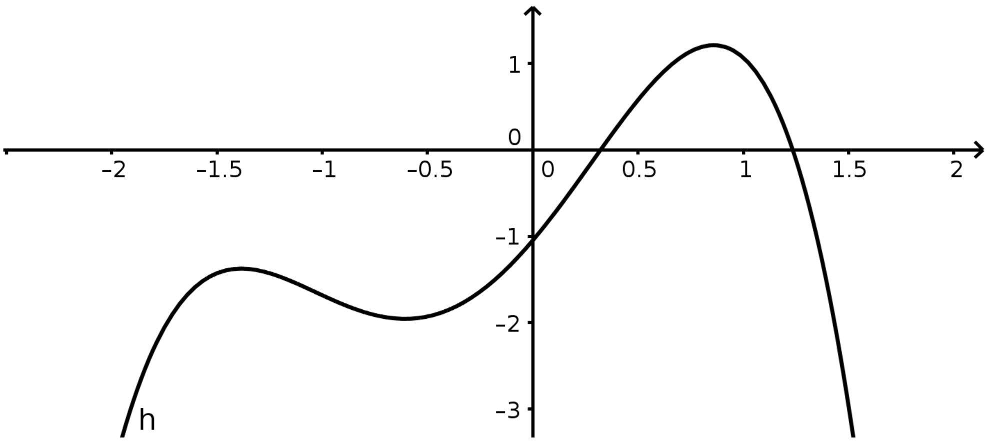
- $f(x) = x \cdot e^x$
- $g(x) = e^{-x^2}$
- $h(x) = \dfrac{1}{1 + e^{-x}}$
- $j(x) = \dfrac{\text{sen}(x)}{x}$
- $k(x) = \ln(x^2 + 1)$
- $l(x) = x^2 \cdot \text{sen}(x)$
- $q(x) = \dfrac{2400 + 2x^3}{x}$

Problema 11

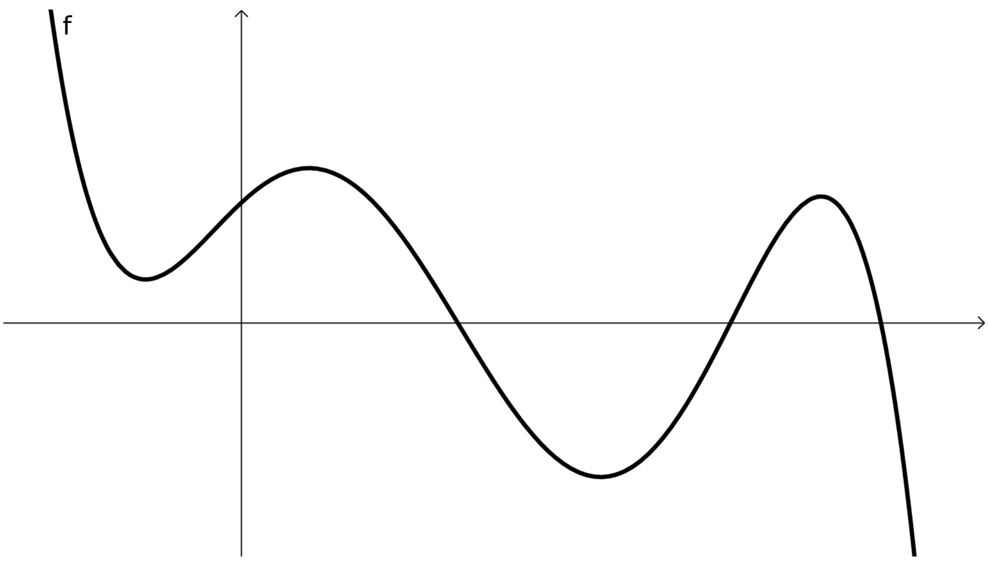
a) Dibujar con la mayor precisión posible el gráfico de la función derivada g'.



b) Dibujar con la mayor precisión posible el gráfico de la función derivada h'.



c) Realizá un gráfico aproximado de la función f'.



Unidad 5: Aplicaciones de la derivada

Análisis de funciones, estudio de problemas y optimización

Análisis de funciones

Problema 1 La recta tangente al gráfico de una cierta función f en $x = 0$ tiene ecuación $y = 5x - 2$.

a) ¿Cuánto vale $f'(0)$?

b) Si en $x = 3$ la recta tangente tiene ecuación $y = -2x + 3$, ¿cuánto vale $f(3)$?

c) ¿Cómo puede ser la fórmula de la función f?

Problema 2 Consideren la recta L de ecuación $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ y su punto $A = \left(2, \frac{3}{2}\right)$. Encuentren la ecuación de una función cuadrática f de modo tal que la recta L resulte tangente al gráfico de f en el punto A.

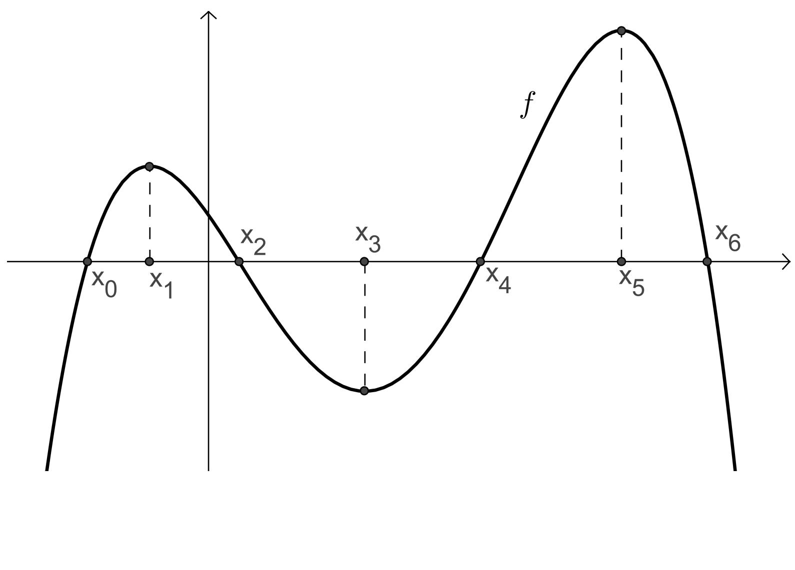
Problema 3 Para realizar observando el gráfico de la función f.

a) identificá un intervalo en el que se cumplan las siguientes dos condiciones:

$$f(x) \geq 0 \qquad \wedge \qquad f'(x) \leq 0$$

b) Identificá otro intervalo en el que se cumplan estas otras dos condiciones:

$$f(x) \leq 0 \qquad \wedge \qquad f'(x) \leq 0$$



Problema 4 Dibujá el gráfico de una función $g(x)$ que cumpla las condiciónes $g(x) \leq 0$ y $g'(x) \geq 0$ en el intervalo $(-1, 4)$ y que además tenga un mínimo local en $x = -1$.

Problema 5 Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad / \quad f(x) = -x^4 + 3x^2 - 6x + 4$.

a) Identificá el mayor intervalo para el cual:
   - $f(x) > 0$;
   - $f'(x) < 0$;
   - las ordenadas al origen de las rectas tangentes al gráfico de f en ese intervalo son positivas.

b) Elegí un punto del intervalo identificado en el ítem anterior, calculá **analíticamente** la recta tangente al gráfico de f en ese punto y corroborá que cumple con lo pedido en el ítem anterior.

Estudio de problemas

Problema 6 Una camioneta de reparto va de una ciudad hacia otra, sobre una ruta, para hacer una entrega. Luego de realizada la entrega, vuelve a la ciudad de origen. El gráfico que se encuentra en el archivo `recorrido_auto.ggb` representa la distancia de la camioneta a la ciudad de origen (medida en kilómetros) en función del tiempo transcurrido desde que salió a hacer el reparto (medido en horas).

a) Determiná aproximadamente:
   (i) a qué distancia se encuentra la ciudad de destino y cuánto tarda en llegar la camioneta;
   (ii) cuánto tarda en hacer la entrega;
   (iii) en qué momento del trayecto (el tiempo y la posición) la camioneta va a la mayor velocidad y cuál es esa velocidad.

b) Realizá un gráfico aproximado de la función que describe la velocidad de la camioneta en cada instante del trayecto.

Problema 7 Una pileta se está llenando con agua mediante una canilla. En un momento dado (que tomaremos como tiempo 0) se comienza a cerrar la canilla hasta que se llega a cerrar totalmente. La cantidad de agua que contiene la pileta (en litros) en función del tiempo (minutos) está dada por la función:

$$f : [0; t_1] \to \mathbb{R} / f(x) = x^3 - 30x^2 + 300x + 1500$$

a) ¿Cuál es el tiempo t_1 en el cual la canilla se cierra totalmente?

b) ¿Cuántos litros de agua tenía la pileta cuando se comenzó a cerrar la canilla?

c) ¿Cuántos litros de agua entraron a la pileta desde que se empezó a cerrar la canilla hasta que se terminó de cerrar?

d) ¿Cuál es la cantidad media (o promedio) de litros por minuto $(\frac{l}{m})$ que entraron a la pileta desde que se comenzó a cerrar la canilla hasta que se terminó de cerrar?

e) ¿Cuál es la cantidad media de $\frac{l}{m}$ que entraron a la pileta entre el minuto 3 y el minuto 5 después de que se empezó a cerrar la canilla?

f) ¿Cuál es la cantidad exacta de $\frac{l}{m}$ que estaban saliendo por la canilla a los cuatro minutos de haber empezado a cerrarla?

g) ¿Podrías definir una función que describa la cantidad de agua que salía por la canilla en cada momento entre que se empezó y se terminó de cerrar?

Problema 8 El depósito de descarga de un inodoro se llena desde que se aprieta el botón (aunque algunos todavía lo llamen *tirar la cadena*) hasta que el flotante detiene la carga y evita que se rebase. La fórmula de la función f calcula la cantidad de agua que hay en el depósito en ese intervalo de tiempo.

$$f : [0; t_1] \to \mathbb{R} / f(t) = \frac{1}{84}t^3 - \frac{5}{8}t^2 + 7t$$

La cantidad de agua del depósito esta medida en litros y el tiempo en segundos.

a) Si el deposito empieza a llenarse en $t = 0$ s. ¿Cuál es el tiempo t_1 que tarda en llenarse el deposito?

b) ¿Cuántos litros de agua contiene el deposito una vez lleno?

c) ¿Qué cantidad de litros por segundo entran en el depósito en el instante $t = 0$?

Problema 9 Un automóvil viaja por una ruta. La posición del auto sobre la ruta (medida en km) entre los momentos en que parte y en que llega a destino (medidos en minutos) está descripta por la función:

$$f : [0; t_1] \to \mathbb{R} \quad / \quad f(t) = -\frac{1}{7200}x^3 + \frac{1}{40}x^2 + 10$$

a) Sabiendo que el auto no se detiene en su trayecto hasta llegar a su destino, ¿cuál es el instante t_1 en que llega a su destino?

b) ¿Qué distancia recorrió el auto en su trayecto?

c) ¿Cuál fue la mayor velocidad a la que fue el auto? Expresarla en $\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Problema 10 Dos automóviles se mueven por una ruta según las siguientes funciones de posición, en donde la posición está expresada en kilómetros y el tiempo está expresado en horas.

- Automóvil A $\quad f : [0; t_A] \longrightarrow \mathbb{R} \quad / \quad f(x) = -x^5 + \frac{45}{4}x^4 - 40x^3 + 50x^2 + 40$
- Automóvil B $\quad g : [0; t_B] \longrightarrow \mathbb{R} \quad / \quad g(x) = -\frac{11}{6}x^3 + \frac{33}{2}x^2 + 5$

Se sabe que el auto A se detiene una vez durante su trayecto antes de finalizar su recorrido. Del auto B se sabe que solamente se detiene cuando finaliza su recorrido.

a) Calculá los instantes t_A y t_B.

b) ¿Existe algún momento en el que se cruzan los dos autos? ¿Cuál es su velocidad en ese momento?

c) ¿Existe algún instante en el que vayan a la misma velocidad? ¿Cuál es su velocidad en ese instante?

d) ¿Cuál de los dos autos fue a mayor velocidad? Justificá detalladamente tu decisión.

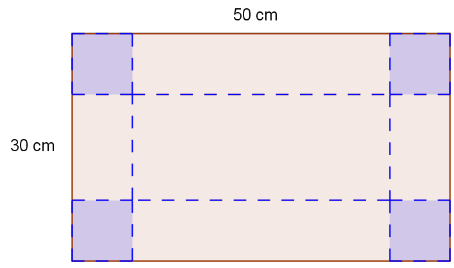
Optimización

Problema 11 Cortando cuadrados iguales de las esquinas de una plancha de cartón de $50\,\mathrm{cm} \times 30\,\mathrm{cm}$, el cartón puede plegarse para formar una caja.

a) ¿Cuál es el volumen de la caja que se puede armar si el lado de los cuadrados que se cortan mide 8 cm?

b) ¿Y si mide 12 cm?

c) ¿Cuál debe ser la medida del lado del cuadradito cortado para que el volumen de la caja que se arme sea lo mayor posible?



Problema 12 Se pretende fabricar una lata cilíndrica, con tapa, de 1 litro de capacidad. ¿Cuáles deben ser sus dimensiones para que se utilice el mínimo posible de metal?

Problema 13 Hallá las dimensiones que hacen mínimo el gasto de material de un envase con forma de paralelepípedo rectangular sabiendo que su volumen ha de ser $1\,\mathrm{dm}^3$ y que su ancho debe ser de $5\,\mathrm{cm}$.

Problema 14 Un agricultor dispone de $\$30000$ para cercar un terreno rectangular. Usando el río adyacente como uno de los lados, el recinto sólo necesita 3 cercas que lo delimiten. El costo de la cerca paralela al río es de $\$50$ por metro instalado, y el de la cerca para cada uno de los lados restantes es de $\$30$ por metro instalado. Calculá las dimensiones del terreno de área máxima que puede cercar con el presupuesto del que dispone.

Unidad 6: Integrales

Recorridos, llenados y áreas

Variaciones de cantidades

Problema 1 Una pileta se está llenando con agua mediante una canilla. En un momento dado (que tomaremos como tiempo 0) se comienza a cerrar la canilla hasta que se llega a cerrar totalmente. La cantidad de agua que contiene la pileta (en litros) en función del tiempo (minutos) está dada por la función:

$$f : [0; t_1] \to \mathbb{R} \qquad / \qquad f(t) = t^3 - 30t^2 + 300t + 1500$$

a) ¿Cuál es el tiempo t_1 en el cual la canilla se cierra totalmente?

b) ¿Cuántos litros de agua tenía la pileta cuando se comenzó a cerrar la canilla?

c) ¿Cuántos litros de agua entraron a la pileta desde que se empezó a cerrar la canilla hasta que se terminó de cerrar?

d) ¿Cuál es la cantidad media (o promedio) de litros por minuto ($\frac{\text{l}}{\text{m}}$) que entraron a la pileta desde que se comenzó a cerrar la canilla hasta que se terminó de cerrar?

e) ¿Cuál es la cantidad media de $\frac{\text{l}}{\text{m}}$ que entraron a la pileta entre el minuto 3 y el minuto 5 después de que se empezó a cerrar la canilla?

f) ¿Cuál es la cantidad exacta de $\frac{\text{l}}{\text{m}}$ que estaban saliendo por la canilla a los 4 minutos de haber empezado a cerrarla?

g) ¿Podrías definir una función que describa la cantidad de agua que salía por la canilla en cada momento entre que se empezó y se terminó de cerrar?

Problema 2 Ante la misma situación que el problema anterior, pero con otra pileta y otra canilla, sabemos que la función que describe la cantidad de agua que sale por la canilla desde que se comienza hasta que se termina de cerrar está dada por:

$$g : [0; t_1] \to \mathbb{R} \qquad / \qquad g(t) = 2t^2 - 116t + 882$$

a) ¿Cuál es el tiempo t_1 en el cual la canilla se cierra totalmente?

b) ¿Cuántos litros de agua entraron en la pileta durante el período en que se fue cerrando la canilla?

c) ¿Cuántos litros de agua entraron en la pileta durante los primeros 7 minutos en que se estaba cerrando la canilla?

d) ¿Podrías describir una fórmula que para cada instante t calcule la cantidad de agua que entró en la pileta desde que se comenzó a cerrar la canilla?

e) Si cuando se comenzó a cerrar la canilla la pileta contenía 1000 litros de agua, definan una fórmula que calcule la cantidad de agua que contenía la pileta en cada instante entre que se empezó y se terminó de cerrar la canilla.

f) ¿Cuántos litros de agua entraron a la pileta entre los minutos 5 y 7?

Problema 3 La cantidad de litros de agua por segundo que salen por la compuerta de una represa está representada por la función:

$$f : [0; t_0] \to \mathbb{R} \quad / \quad f(t) = \frac{1}{5}t^3 - 3t^2 + 100$$

a) El instante t_0 es el momento en el que no sale más agua por la compuerta. ¿Cuál es ese momento?

b) ¿Es verdad que a medida que transcurre el tiempo cada vez sale menos agua por la compuerta?

c) Calculá cuántos litros de agua salieron por la compuerta durante el tiempo para el cual está definida la función.

d) Si en el instante t_0 el embalse de la represa tiene 20000 litros de agua. ¿Cuántos litros tenía cuando comenzó a cerrarse la represa?

e) Escribí la fórmula de una función que calcule la cantidad de agua que había en el embalse para cada instante entre $t = 0$ y $t = t_0$.

Problema 4 La cantidad de litros de agua por segundo que entran al embalse de un río está representada por la función:

$$f : [0; 5] \to \mathbb{R} \quad / \quad f(t) = t^3 - 16t^2 + 77t + 60$$

a) ¿Es verdad que a medida que transcurre el tiempo cada vez entra más agua al embalse?

b) Calculá cuántos litros de agua entraron al embalse durante el tiempo para el cual está definida la función.

c) Si en el instante $t = 5$ el embalse de la represa tiene 30000 litros de agua. ¿Cuántos litros tenía en el instante $t = 0$?

d) Escribí la fórmula de una función que calcule la cantidad de agua que había en el embalse para cada instante entre $t = 0$ y $t = 5$.

Problema 5 Un automóvil está detenido en un semáforo. Cuando el semáforo cambia a luz verde se pone en marcha de tal modo que su velocidad está dada por la siguiente fórmula

$$v(t) = -\frac{1}{20}t^3 + \frac{1}{5}t^2 + 3t$$

donde t se mide en segundos y $v(t)$ en $\frac{\text{m}}{\text{s}}$. El auto sólo se detiene en el siguiente semáforo.

a) Indicá cuántos minutos duró el trayecto realizado (de semáforo a semáforo)

b) Indicá en qué período de tiempo el conductor pisa el acelerador.
c) ¿Qué distancia recorre mientras acelera?
d) ¿Cuál fue la velocidad máxima alcanzada por el auto?
e) ¿Qué distancia separa ambos semáforos?

Cálculo de áreas

Problema 6 Calculá el área de la región bajo el gráfico de la función $f(x) = 2x + 1$ hasta el eje x entre:

- $x = 0$ y $x = 7$;
- $x = 0$ y $x = 19$;
- $x = 0$ y $x = x_0$.

¿Qué relación existe entre la fórmula de la función $A(x)$, que calcula el área bajo el gráfico de la función f entre 0 y x, y la fórmula de la función f?

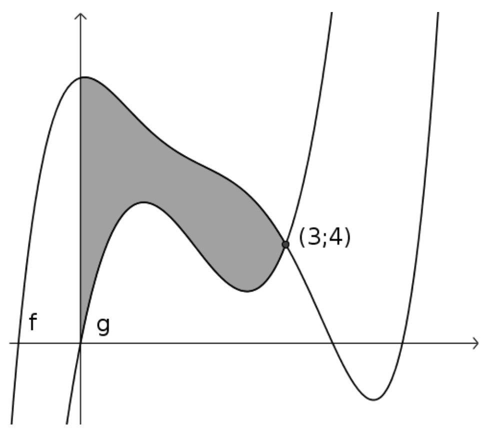
Problema 7 Sea $g(x) = -x(x-12)$, calculá el área bajo el gráfico de g entre:

- $x = 0$ y $x = 12$;
- $x = 1$ y $x = 10$.

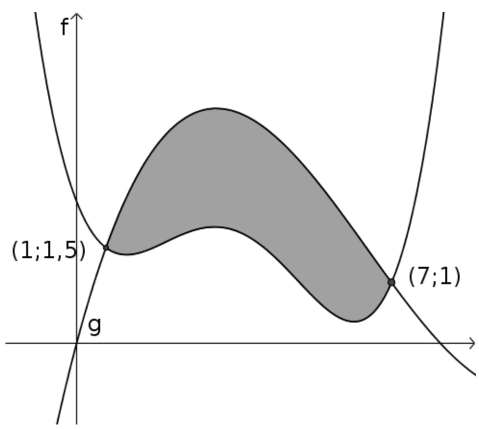
Problema 8

a) Calculá el área encerrada entre las funciones $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 6$ y $g(x) = x$.
b) Calculá el área encerrada entre las funciones $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 6$ y $g(x) = x - \frac{1}{4}$.

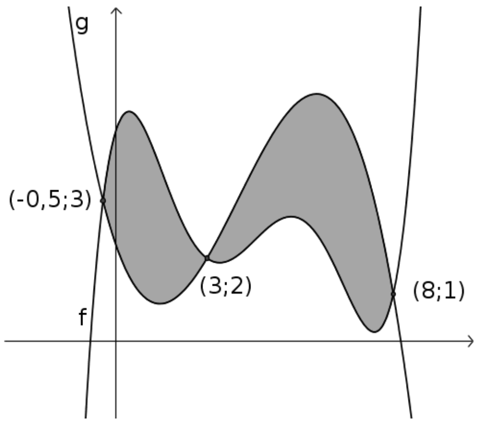
Problema 9 Establecé mediante integrales el área de las regiones sombreadas.

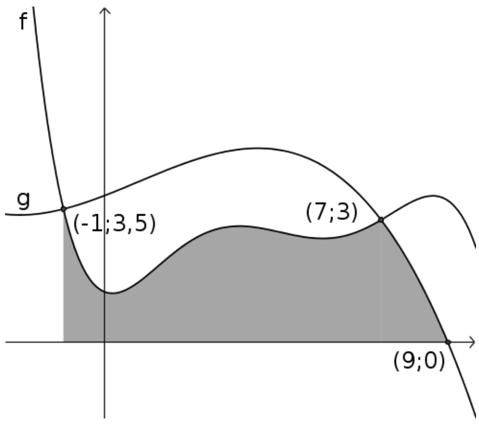


a)



b)

c) 

d) 

Problema 10 Calcular el área de la región encerrada por los graficos de las funciones.

a) $f(x) = x^2 + 1$; $g(x) = x + 3$

b) $f(x) = -x^2 + 1$; $g(x) = x + 1$

c) $f(x) = x^3 - x + 1$; $g(x) = \frac{1}{2}x + 1$

d) $f(x) = x^3 - x + 4$; $g(x) = -2x + 5$; el eje x

Problema 11 Siendo

- $f(x) = -x^2 + 9$
- $g(x) = x^2 + 1$

El área encerrada por los gráficos de las funciones f y g es:

- ☐ $\int_{-5}^{5} -x^2 + 9\, dx - \int_{-5}^{5} x^2 + 1\, dx$
- ☐ $\int_{-2}^{2} x^2 + 1\, dx - \int_{-2}^{2} -x^2 + 9\, dx$
- ☐ $\int_{-2}^{2} -x^2 + 9\, dx - \int_{-2}^{2} x^2 + 1\, dx$
- ☐ $\int_{-5}^{5} -x^2 + 9\, dx - \int_{-2}^{2} x^2 + 1\, dx$

Problema 12 Si la región encerrada por el gráfico de $f(x) = -2x^2 + 10x + 12$ y el eje x queda dividida por la recta $x = a$ en dos regiones de igual área, entonces el valor de a es:

☐ 0 ☐ 6 ☐ 2,5 ☐ 12

Problema 13 Dada la función $f(x) = x^2 - 2x + 1$:

a) Calculá la ecuación de la recta L que es tangente al gráfico de f en $x_0 = 2$.

b) Calculá el área encerrada entre el gráfico de f, la recta L y el gráfico de g, siendo $g(x) = -x + 13$.

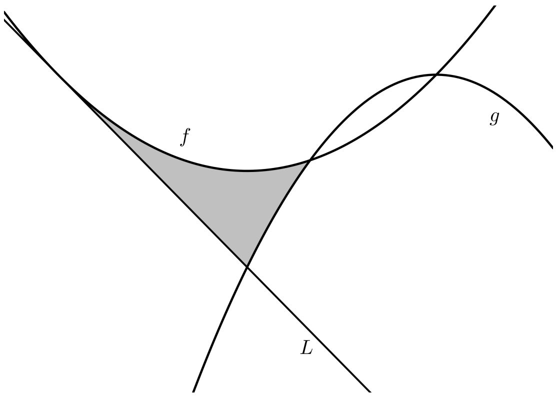
Problema 14 Dada la función $f(x) = -3x^2 + 4x + 5$:

a) Calculá la ecuación de la recta L que es tangente al gráfico de f en $x_0 = 1$.

b) Calculá el área encerrada entre el gráfico de f, la recta L y el gráfico de g, siendo $g(x) = x - 1$.

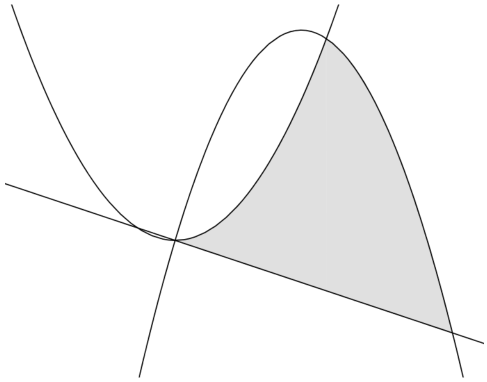
Problema 15 Calculá el área sombreada sabiendo que:

- $f(x) = x^2 + 4x + 6$.
- $g(x) = -2x^2 - 4x + 1$.
- La recta L es tangente al gráfico de f en el punto $(-3; f(-3))$.



Problema 16 Calculá el área sombreada sabiendo que:

- $g(x) = -\frac{1}{3}x + 1$.
- $h(x) = -x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{11}{3}$.
- f es una función cuadrática que pasa por los puntos $(0; 2)$ y $(1; 4)$, y su vértice pertenece a los gráficos de g y de h.



Parte III

Apéndice

Problemas resueltos y complementos teóricos

Cómo usar este material

A lo largo de todo el cuadernillo aparecen problemas identificados con el ícono (). Este símbolo identifica a los problemas que encontrarán resueltos y desarrollados en detalle en el presente apéndice.

La propuesta de este curso –a la que responde este cuadernillo– es aprender matemática a partir de la resolución de problemas. Los autores estamos convencidos de que el aprendizaje y la comprensión tienen más posibilidad de producirse cuando es uno mismo quien encuentra una respuesta que cuando otro simplemente se la comunica. En ese sentido no pensamos que la lectura sistemática y pasiva de problemas resueltos pueda por sí sola convertirnos en buenos resolvedores de problemas y hacernos comprender la matemática, de la misma manera que ir a escuchar muchos conciertos no nos permitiría aprender a tocar el violín.

Sin embargo, tampoco pensamos que para que un problema de matemática nos deje un aprendizaje sea necesario resolverlo por completo y llegar a una respuesta completa y definitiva. Muchas veces lo más rico de lo que un problema nos enseña tiene que ver con las discusiones que se dan durante su resolución, la variedad de enfoques y caminos que se exploran, las razones por las que se descartan las respuestas equivocadas y los nuevos problemas que se nos ocurren, acaso por accidente.

La intención de incluir estos problemas resueltos en esta sección no apunta, por lo tanto, a que los estudiantes lean los enunciados en el cuadernillo y salten directamente a mirar las soluciones. Los problemas verdaderamente buenos para aprender son aquellos que se pueden resolver de muchas maneras distintas. Cuanto mejor es el manejo del tema que uno tenga, mayores serán sus posibilidades de resolver el problema de un modo más breve, más económico. Pero aun cuando uno no conozca el recurso adecuado para resolver el problema de una forma simple, podrá explorar otras alternativas más trabajosas o más intuitivas. Lo que se busca en este apéndice es comentar una variedad de soluciones posibles y aprovechar el contexto para desarrollar algunos conceptos teóricos relacionados con el tema del problema.

El uso que se recomienda para este material consiste en:

- Acudir a su lectura cuando el problema ya haya sido pensado todo lo posible. En el mejor de los casos, después de haberse reunido con compañeros para intercambiar ideas y comparar las distintas soluciones.

- Observar que las explicaciones contienen definiciones de los conceptos matemáticos involucrados en el problema y repasos de procedimientos de cálculo tanto de este curso como correspondientes a contenidos de la escuela secundaria.

- Después de la lectura, volver a otros problemas del cuadernillo que no hayan podido resolver y ver si la lectura les brindó nuevos recursos que faciliten la resolución de aquellos problemas.

Soluciones a los problemas

Problema 18 Encuentren (deduzcan, calculen) la ecuación de una recta que pasa por los puntos $(50, 10)$ y $(104, 40)$.
Solución: Tengamos en cuenta que uno de los formatos de una ecuación de recta genérica es

$$y = ax + b \tag{7.1}$$

donde a y b son un par de números que determinan la ecuación. Nuestro desafío será entonces poder determinar de todos los pares de valores posibles de a y b para que la recta pase por los puntos dados.

Éstas son algunas de las preguntas que nos podemos hacer y que será bueno que podamos responder:

¿Cuál es el par de valores a y b que hace que la recta pase por los puntos que nos dan de datos?

¿Serán, por ejemplo, los valores $a = 3$ y $b = -12$?

¿Serán otros dos?

¿Cómo podemos saberlo?

¿Cómo se traduciría al lenguaje algebraico el hecho que el punto $(50, 10)$ pertenezca a la recta de ecuación $y = 3x - 12$

La respuesta a esta última pregunta es que si $(50, 10)$ pertenece a la recta de ecuación

$$y = 3x - 12$$

entonces se debe verificar que reemplazando x por 50 e y por 10 en la ecuación se obtenga una igualdad. Pero al hacerlo se obtiene que $10 = 3 \cdot 50 - 12$ que claramente **no** es una igualdad, ya que el lado izquierdo vale 10 y el derecho 138. Luego, el punto $(50, 10)$ no pertenece a la recta de ecuación $y = 3x - 12$ o, como se suele decir, la recta de ecuación $y = 3x - 12$ no pasa por el punto $(50, 10)$.

Usemos esta idea para averiguar valores de a y b para los que la recta sí pase por $(50, 10)$. Si se debe verificar la igualdad, entonces debe cumplirse

$$10 = a \cdot 50 + b$$

Observen que esta última igualdad se puede escribir de muchas otras maneras equivalentes: $10 = 50a + b$, o bien $50a + b = 10$, o bien

$$b = 10 - 50a \tag{7.2}$$

Pero todavía no podemos estar seguros de cuáles son los valores exactos de a y b que estamos buscando.

¿Por qué ocurre esto?

¿Se puede justificar geométricamente?

Sí. Ocurre porque hay infinitas rectas diferentes que pasan por el punto $(50, 10)$ (grafiquen algunas en una hoja o intenten imaginarlas). Lo que nos dicen esas igualdades (ecuaciones) que hemos hallado es que si eligiéramos algún valor para a el valor de b quedaría automáticamente determinado o viceversa: si asignamos a b algún valor obtenemos un único a.

Podríamos representar la infinidad de rectas que pasan por $(50, 10)$ de la siguiente manera: reemplazar la expresión de b obtenida de la ecuación (7.2) en la ecuación (7.1), de donde resulta:

$$y = ax + 10 - 50a$$

que también puede escribirse como $y = ax - a50 + 10$ o, sacando factor común a, como

$$y = a(x - 50) + 10 \tag{7.3}$$

Es momento de poner en juego la información que nos da el otro punto. Por un punto pasan infinitas rectas, pero por dos puntos distintos pasa una sola. Usando la información del punto $(104, 40)$ podemos encontrar cuál debe ser el valor de a para que una sola recta que pase por ambos puntos quede determinada. Reemplazando las coordenadas de este punto en la ecuación (7.3) obtenemos:

$$40 = a(104 - 50) + 10$$

De donde $40 - 10 = a(104 - 50)$ y, por lo tanto:

$$a = \frac{40 - 10}{104 - 50}$$

Con lo cual la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(50, 10)$ y $(104, 40)$ queda de la forma

$$y = \frac{40 - 10}{104 - 50}(x - 50) + 10$$

Que también puede escribirse como:

$$y - 10 = \frac{40 - 10}{104 - 50}(x - 50)$$

Es fácil (y por lo tanto corresponde hacerlo siempre) chequear, a modo de control, que si reemplazamos el punto $(50, 10)$ en la ecuación, ambos lados de la ecuación se anulan (es decir, se obtiene $0 = 0$), lo que verifica que la recta descripta por la ecuación pasa por el punto $(50, 10)$. Ustedes pueden verificar también que la recta pasa por el punto $(104, 40)$, reemplazando adecuadamente en la ecuación.

Alguien podría preguntarse: ¿Por qué escribir $y - 10 = \frac{40-10}{104-50}(x - 50)$ en vez de resolver las cuentas y quedarse con $y - 10 = \frac{5}{9}(x - 50)$? La respuesta es: en la ecuación $y - 10 = \frac{40-10}{104-50}(x - 50)$ se han conservado todos los números que eran coordenadas de los dos puntos del enunciado. De esta forma, el/la estudiante que haya comprendido cómo se dedujo esta ecuación podrá adaptarla a cualquier par de puntos que determinen una recta.

¿A ver si comprendí?

a) ¿Cómo adaptarían la ecuación obtenida si se estuviera buscando la ecuación de la recta que pasa por los puntos $P = (-3, -7)$ y $Q = (2, 5)$?

b) ¿Cómo adaptarían la ecuación obtenida si se estuviera buscando la ecuación de la recta que pasa por los puntos $R = (\frac{1}{2}, -\frac{2}{5})$ y $S = (-\frac{7}{3}, \frac{16}{5})$?

c) ¿Cómo adaptarían la ecuación obtenida para una recta general, que pasa por los puntos $M = (x_1, y_1)$ y $N = (x_2, y_2)$?

Por último, podemos convertir la ecuación obtenida en otra equivalente (es decir, que representa a la misma recta), pero que responda al formato $y = ax + b$ mencionado en (7.1). Para ello, basta con operar adecuadamente. Lo mostramos paso a paso:

$$\begin{aligned} y - 10 &= \frac{40-10}{104-50}(x-50) \Rightarrow (\text{Sumando 10 y operando}) \\ y &= \frac{5}{9}(x-50) + 10 \Rightarrow (\text{Distribuyendo el } \frac{5}{9}) \\ y &= \frac{5}{9}x - \frac{5}{9}50 + 10 \Rightarrow (\text{ Operando}) \\ y &= \frac{5}{9}x - \frac{160}{9} \end{aligned}$$

En esta última expresión se pueden apreciar los valores de a y b. El número a es el responsable de la inclinación de la recta y el número b es el valor de y que correponde en la ecuación al valor $x = 0$ y es, por lo tanto el punto del eje y por el que pasa la recta. Sintetizamos todo lo mostrado hasta ahora en la siguiente

Definición 1 *La ecuación $y = ax + b$ se llama **ecuación explícita de la recta**. En esta ecuación x e y son las **variables**. El número a es la **pendiente** de la recta. El número b se llama **ordenada al origen**.*

Observación: Si es $x = 0$, resulta $y = a \cdot 0 + b = b$. Por lo tanto el punto de coordenadas $(0, b)$ siempre pertenece a la recta, lo que significa que la recta intersecta en b al eje de las y. Este eje también se llama **eje de ordenadas**.

Problema 12: La ecuación de una misma función cuadrática se puede escribir de muchas formas equivalentes. Decidan si las siguientes ecuaciones corresponden o no a una misma función.

a) $f(x) = (x-4) \cdot (2x+1)$

b) $f(x) = (x-4) \cdot 2x + 1$

c) $f(x) = 2x^2 - 7x - 4$

d) $f(x) = 2(x - \frac{7}{4})^2 - \frac{81}{8}$

Solución:

Vamos a proponer distintos caminos para resolver el problema. Cada uno pone en juego un conocimiento específico acerca de las funciones cuadráticas, pero también acerca de distintos recursos matemáticos y formas de pensar los problemas.

Camino 1: "puramente algebraico."

Todas las funciones cuadráticas se pueden definir mediante una fórmula del tipo

$$f(x) = ax^2 + bx + c \tag{7.4}$$

donde a, b y c son números fijos (se llaman **coeficientes**), mientras que x es la variable. Además, debe ser $a \neq 0$ (¿Por qué?). Por ejemplo, la ecuación c) del problema es $f(x) = 2x^2 - 7x - 4$. En esta ecuación los coeficientes son $a = 2$, $b = -7$ y $c = -4$.

Queremos ver si las otras ecuaciones corresponden a la misma función. Para eso podemos considerar la siguiente

Definición 2 *Dos funciones cuadráticas definidas de los reales en los reales son* ***iguales*** *si cuando sus fórmulas se escriben en la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ los coeficientes son iguales.*

Para poder comparar las demás ecuaciones, necesitamos llevarlas, entonces, a la forma (7.4). Veamos cómo hacerlo con cada una de ellas.

Ecuación *a)* $f(x) = (x-4)\cdot(2x+1)$. Multiplicamos mediante la propiedad distributiva.

$$\begin{aligned}(x-4)\cdot(2x+1) &= 2x^2 + x - 8x - 4 \\ &= 2x^2 - 7x - 4,\end{aligned}$$

por lo que la función de ecuación *a*) es efectivamente igual a la de ecuación *c*).

Ecuación *b)* $f(x) = (x-4)\cdot 2x + 1$. También multiplicamos mediante la propiedad distributiva, pero teniendo en cuenta la separación en terminos.

$$(x-4)\cdot 2x + 1 = 2x^2 - 8x + 1,$$

que es evidentemente distinta de la ecuación *c*).

Ecuación *d)* $f(x) = 2(x - \frac{7}{4})^2 - \frac{81}{8}$. Desarrollamos primero el cuadrado del binomio y luego multiplicamos por 2.

$$\begin{aligned}2\left(x - \frac{7}{4}\right)^2 - \frac{81}{8} &= 2\left(x^2 - 2\cdot\frac{7}{4}x + \left(\frac{7}{4}\right)^2\right) - \frac{81}{8} \\ &= 2\left(x^2 - \frac{7}{2}x + \frac{49}{16}\right) - \frac{81}{8} \\ &= 2x^2 - 7x + \frac{49}{8} - \frac{81}{8} \\ &= 2x^2 - 7x - \frac{32}{8} \\ &= 2x^2 - 7x - 4,\end{aligned}$$

que –al igual que la ecuación *a*)– es equivalente a la *c*).

Camino 2: "geométrico."

Como tres puntos no alineados determinan una única parábola, podemos elegir tres puntos de la parábola que corresponde a la ecuación *a*) y ver si son también puntos de las demás parábolas. Por ejemplo, si elegimos $x_1 = -1$, $x_2 = 0$ y $x_3 = 1$ resulta, según la ecuación *a*):

$$\begin{aligned} f(x_1) &= f(-1) \\ &= ((-1)-4)\cdot(2\cdot(-1)+1) \\ &= (-5)\cdot(-1) \\ &= 5 \end{aligned}$$

Lo que significa que $A = (-1, 5)$ es un punto de la parábola definida por la ecuación *a*).

$$\begin{aligned} f(x_2) &= f(0) \\ &= (0-4)\cdot(2\cdot(0)+1) \\ &= (-4)\cdot(1) \\ &= -4 \end{aligned}$$

Lo que significa que $B = (0, -4)$ es otro punto de esa parábola. Por último:

$$\begin{aligned} f(x_3) &= f(1) \\ &= (1-4)\cdot(2\cdot(1)+1) \\ &= (-3)\cdot(3) \\ &= -9 \end{aligned}$$

Lo que significa que $C = (1, -9)$ es un tercer punto de la misma parábola.

Podemos chequear ahora si esos mismos puntos satisfacen las demás ecuaciones.

Ecuación *b*) $f(x) = (x-4)\cdot 2x + 1$.

$$\begin{aligned} f(x_1) &= f(-1) \\ &= (-1-4)\cdot 2(-1)+1 \\ &= (-5)\cdot(-2)+1 \\ &= 11 \\ &\neq 5 \end{aligned}$$

Por lo tanto, mientras que $A = (-1, 5)$ es un punto de la parábola de ecuación *a*), no es un punto de la parábola de ecuación *b*), ya que $(-1, 11)$ lo es y $x_1 = -1$ no puede tener dos imágenes distintas (5 y 11) a través de la misma función. Observen que esta conclusión coincide con la del **Camino 1**, en el que ya habíamos visto que las ecuaciones *a*) y *b*) NO eran equivalentes.

Ecuación *c*) $f(x) = 2x^2 - 7x - 4$. Es fácil ver que los puntos A, B y C están en esta parábola. Lo mostramos con el punto A:

$$\begin{aligned} f(x_1) &= f(-1) \\ &= 2(-1)^2 - 7(-1) - 4 \\ &= 2+7-4 \\ &= 5 \end{aligned}$$

por lo que $A = (-1, 5)$ es un punto de la parábola de ecuación *c*). Dejamos la verificación de los puntos B y C para que la hagan ustedes.

¿A ver si comprendí? Oscar quiere usar el método del **Camino 2** para decidir si las funciones de ecuaciones $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3x + \frac{1}{2}$ y $g(x) = \frac{1}{2}(x-3)^2 + 1$ son iguales. Para eso elige probar con $x_1 = 1$ y $x_2 = 5$:

$$\begin{aligned} f(x_1) &= f(1) \\ &= -\frac{1}{2}\cdot 1^2 + 3\cdot 1 + \frac{1}{2} \\ &= -\frac{1}{2} + 3 + \frac{1}{2} \\ &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x_2) &= f(5) \\ &= -\frac{1}{2}\cdot 5^2 + 3\cdot 5 + \frac{1}{2} \\ &= -\frac{25}{2} + 15 + \frac{1}{2} \\ &= 3 \end{aligned}$$

Esto significa que $A = (1,3)$ y $B = (5,3)$ son puntos de la función f.
Por otro lado, al probar con la función g, calcula:

$$\begin{aligned} g(x_1) &= g(1) \\ &= \frac{1}{2}\cdot(1-3)^2 + 1 \\ &= \frac{1}{2}\cdot 4 + 1 \\ &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(x_2) &= g(5) \\ &= \frac{1}{2}\cdot(5-3)^2 + 1 \\ &= \frac{1}{2}\cdot 4 + 1 \\ &= 3 \end{aligned}$$

Lo que significa que también $A = (1,3)$ y $B = (5,3)$ son puntos de la función g.
¿Puede concluir Oscar que las funciones f y g son iguales?

Camino 3: "Gráficos con GeoGebra."

Para investigar y comparar funciones, siempre podemos contar con GeoGebra. Basta con ingresar en el **Campo de Entrada** las ecuaciones que se desea comparar y observar si les corresponde un mismo gráfico. En el ejemplo que venimos analizando, resultaban NO equivalentes las ecuaciones *a*) y *b*). En la FIGURA 7.1 se ve una captura de pantalla en la que fueron graficadas ambas funciones.

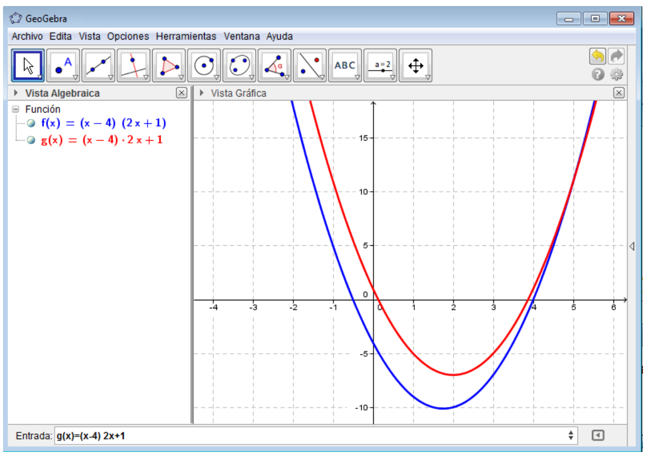


Figura 7.1: Dos cuadráticas distintas en GeoGebra

Este camino tiene la ventaja de ser muy claro desde lo visual, pero tiene la desventaja de que dependemos del graficador y tenemos menos control sobre la relación que hay entre la fórmula y su gráfico.

Problema 13 Encuentren en cada caso, si es posible, la fórmula de una función cuadrática cuyo gráfico pase por los puntos dados.

a) $A = (1, 2)$, $B = (2, 5)$ y $C = (5, -1)$.

b) $A = (1, 2)$ y $B = (2, 5)$

c) $A = (1, 2)$, $B = (2, 5)$ y $D = (-1, -4)$

Solución:
Camino 1: "puramente algebraico."

a) La curva debe pasar por los puntos $A = (1, 2)$, $B = (2, 5)$ y $C = (5, -1)$. Sabemos que su ecuación es de la forma (7.4). Poniendo las coordenadas (x, y) de los puntos dados en esa fórmula tenemos:

$$\begin{aligned} 1^2 a + 1b + c &= 2 \\ 2^2 a + 2b + c &= 5 \\ 5^2 a + 5b + c &= -1 \end{aligned}$$

Es decir:

$$a + b + c = 2 \tag{7.5}$$
$$4a + 2b + c = 5 \tag{7.6}$$
$$25a + 5b + c = -1 \tag{7.7}$$

Ahora se trata de resolver un problema de 3 ecuaciones lineales con 3 incógnitas. Esto puede hacerse de muchas maneras equivalentes. Proponemos una de las tantas posibles.

Restamos miembro a miembro las ecuaciones (7.6) y (7.5):

$$4a + 2b + c - (a + b + c) = 5 - 2,$$

de donde resulta

$$3a + b = 3$$

Restamos miembro a miembro las ecuaciones (7.7) y (7.6):

$$25a + 5b + c - (4a + 2b + c) = -1 - 5,$$

de donde resulta $21a + 3b = -6$, o bien, dividiendo por 3:

$$7a + b = -2$$

Con este procedimiento hemos pasado de tener un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas a tener un sistema de 2 ecuaciones con 2 incógnitas:

$$3a + b = 3 \tag{7.8}$$
$$7a + b = -2 \tag{7.9}$$

Una vez más, restamos miembro a miembro (7.9) y (7.8), obteniendo $4a = -5$, de donde resulta:

$$a = -\frac{5}{4} \tag{7.10}$$

Reemplazando este valor en la ecuación (7.8) se tiene $3 \cdot (-\frac{5}{4}) + b = 3$, por lo que es

$$b = \frac{27}{4} \tag{7.11}$$

Finalmente, poniendo los valores de (7.10) y (7.11) en (7.5) resulta $-\frac{5}{4} + \frac{27}{4} + c = 2$, de donde se puede despejar c como:

$$c = -\frac{7}{2} \tag{7.12}$$

Con los valores de a, b y c obtenidos, la ecuación de la función cuadrática buscada es:

$$f(x) = -\frac{5}{4}x^2 + \frac{27}{4}x - \frac{7}{2} \tag{7.13}$$

¿A ver si comprendí? Si esta ecuación fue buscada con la intención de que la curva pase por los puntos $A = (1, 2)$, $B = (2, 5)$ y $C = (5, -1)$, podríamos controlar que esto se cumpla y estaremos validando la solución obtenida. Si el punto $A = (1, 2)$ está en la parábola entonces debe ser $f(1) = 2$. Lo verificamos con la fórmula obtenida:

$$f(1) = -\frac{5}{4} \cdot 1^2 + \frac{27}{4} \cdot 1 - \frac{7}{2} = -\frac{5}{4} + \frac{27}{4} - \frac{7}{2} = \frac{-5 + 27 - 14}{4} = \frac{8}{4} = 2$$

Verifiquen ustedes que los puntos B y C también satisfacen la ecuación hallada.

b) En este caso solo se indican dos puntos por los que debe pasar la parábola: $A = (1, 2)$ y $B = (2, 5)$. Por lo tanto podemos plantear las mismas ecuaciones (7.5) y (7.6)

$$\begin{aligned} a + b + c &= 2 \\ 4a + 2b + c &= 5 \end{aligned}$$

En este caso tenemos 2 ecuaciones con 3 incógnitas. Si las restamos, al igual que antes, volvemos a obtener la relación (7.8):

$$3a + b = 3$$

de donde se puede despejar b como

$$b = 3 - 3a \tag{7.14}$$

Poniendo esta expresión de b en la ecuación (7.5) se obtiene $a + (3 - 3a) + c = 2$, de donde se puede despejar c como

$$c = 2a - 1 \tag{7.15}$$

Finalmente, poniendo los valores de b y c según las expresiones (7.14) y (7.15) en la ecuación general $f(x) = ax^2 + bx + c$ resulta:

$$f(x) = ax^2 + (3 - 3a)x + (2a - 1) \tag{7.16}$$

El valor de a no quedará determinado, porque no hay una única parábola que pase por los puntos A y B. Para cada valor de a que elijan obtendrán una parábola distinta y todas sirven como solución. Esto se comprenderá mucho mejor cuando vean la solución propuesta por el **Camino 2**, en la que se usa GeoGebra.

> **¿A ver si comprendí?** Como antes, podríamos controlar que la curva de ecuación (7.16) pase por los puntos $A = (1, 2)$ y $B = (2, 5)$. Al hacer las cuentas, los cálculos algebraicos deberían confirmarnos de alguna manera que esto se cumple y que –además– no depende del valor de a.
>
> (i) Verifiquen que los puntos A y B también satisfacen la ecuación (7.16).
>
> (ii) ¿Qué sucede si es $a = 0$? Interpreten ese caso especial.

c) En este caso la curva debe pasar por los puntos $A = (1, 2)$, $B = (2, 5)$ y $D = (-1, -4)$. Otra vez, poniendo las coordenadas (x, y) de los puntos dados en la fórmula genérica (7.4), tenemos:

$$\begin{aligned} 1^2a + 1b + c &= 2 \\ 2^2a + 2b + c &= 5 \\ (-1)^2a + (-1)b + c &= -4 \end{aligned}$$

Es decir, el sistema:

$$a + b + c = 2 \tag{7.17}$$
$$4a + 2b + c = 5 \tag{7.18}$$
$$a - b + c = -4 \tag{7.19}$$

Ustedes pueden probar resolverlo siguiendo los mismos pasos que mostramos en la parte *a*)[5]. Acá lo resolveremos con otra técnica, para mostrar que los sitemas de ecuaciones lineales no se resuelven necesariamente de una única manera.

De la ecuación (7.17) despejamos c, obteniendo:

$$c = 2 - a - b \tag{7.20}$$

También despejamos c de la ecuación (7.18) y resulta:

$$c = 5 - 4a - 2b \tag{7.21}$$

Igualando las ecuaciones (7.20) y (7.21) tenemos $2 - a - b = 5 - 4a - 2b$, de donde, despejando b, se tiene:

$$b = 3 - 5a \tag{7.22}$$

Hemos obtenido una expresión para b que depende de a. Podemos hacer lo misnmo con c, reemplazando la ecuación (7.22) en la (7.20): $c = 2 - a - (3 - 5a)$, que simplificando termina en:

$$c = 4a - 1 \tag{7.23}$$

[5] El estudiante que comience a comprender que para leer matemática hay que usar lápiz y papel y tener una lectura participativa debería tomarese el trabajo de realizar esta resolución que se indica.

Todavía no utilizamos la ecuación (7.19). Es el dato que nos falta para terminar de determinar los valores de a, b y c. Entonces, reemplazamos los valores de b y c, dados respectivamente por las ecuaciones (7.22) y (7.23), en la ecuación (7.19) y tenemos:

$$a-(3-5a)+(4a-1)=-4$$

Vamos a simplificar cuidadosamente esta expresión, atendiendo a las reglas de supresión de paréntesis:

$$\begin{aligned} a-(3-5a)+(4a-1)&=-4 &\Leftrightarrow\\ a-3+5a+4a-1&=-4 &\Leftrightarrow\\ 10a-4&=-4 &\Leftrightarrow\\ a&=0 \end{aligned}$$

Poniendo el valor $a=0$ obtenido en las ecuaciones (7.22) y (7.23) se obtiene $b=3$ y $c=-1$, por lo que la función buscada es $f(x)=0x^2+3x-1$. Pero esto es, simplemente, la función

$$f(x)=3x-1$$

cuyo gráfico no es una parábola, sino una recta.

¿Por qué sucedió esto? Intenten interpretarlo. Como sucedió en la parte *b*), lo sucedido se comprenderá mejor cuando vean la solución propuesta por el **Camino 2**, en la que se usa GeoGebra.

Camino 2: "GeoGebra."

a) Para esta parte podemos construir en GeoGebra los puntos $A=(1,2)$, $B=(2,5)$ y $C=(5,-1)$. Esto puede hacerse mediante la herramienta **Nuevo Punto**, o bien ingresando los puntos textualmente como `A=(1,2)`, etc. en el **Campo de Entrada**. La Figura 7.2 muestra una captura de pantalla con la construcción realizada.

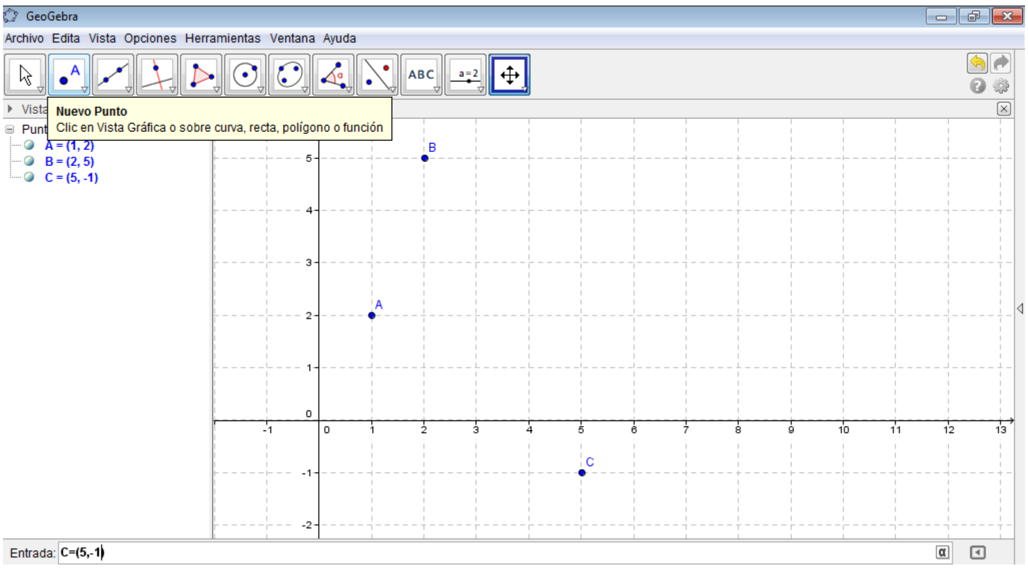


Figura 7.2: Puntos A, B y C

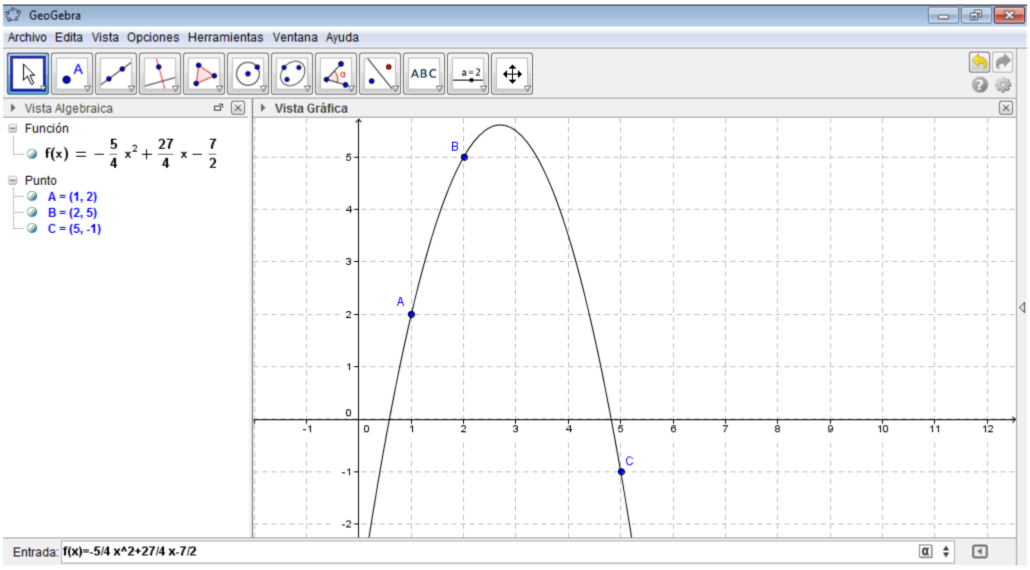


Figura 7.3: Puntos A, B y C y parábola que determinan.

Mediante la misma barra de entrada pueden ingresar la fórmula (7.13) obtenida antes como solución y verificar que la curva es una parábola y pasa por los tres puntos, según se muestra en la Figura 7.3.

Una observación importante: hay que tener en cuenta que la escritura de la fórmula en el **Campo de Entrada** de GeoGebra no admite errores de tipeo y debe ser estrictamente correcta para que GeoGebra la pueda interpretar. La Tabla 7.3 muestra algunas escrituras correctas posibles. Intenten hacer la construcción sin consultar la tabla y utilicen la columna vacía de la tabla para registrar escrituras que –a causa de errores, si los cometen– no les hayan funcionado.

Escrituras correctas	Escrituras incorrectas

`f(x)=-5/4 x^2+27/4 x-7/2`
`f(x)=-5/4*x^2+27/4*x-7/2`
`-5/4 x^2+27/4 x-7/2`	

Tabla 7.3

Este uso que estamos proponiendo para GeoGebra no está resolviendo realmente el problema, sino verificando que la solución obtenida funciona como tal. GeoGebra tiene recursos que permiten obtener la fórmula de manera automática a partir de los tres puntos. Pueden investigarlos. De momento, el objetivo de este problema es adquirir cierto manejo algebraico que esos recursos de GeoGebra no permitirían desarrollar.

b) En esta parte utilizaremos GeoGebra para interpretar la solución obtenida mediante el **Camino 1**. Recordemos que los únicos dos puntos A y B que teníamos como dato no determinaron una única parábola, sino que el parámetro a quedó *libre*, es decir, sin un valor numérico fijo. La ecuación que obtuvimos fue la (7.16):

$$f(x) = ax^2 + (3 - 3a)x + (2a - 1)$$

Para ver lo que significa, creamos –como antes– los puntos $A = (1, 2)$ y $B = (2, 5)$ en GeoGebra y luego recurrimos a la herramienta **Deslizador**. La Figura 7.4 muestra la ubicación de esta herramienta en la barra de herramientas y la ventana que se abre al seleccionarla y hacer clic en algún punto cualquiera de la Vista Gráfica.

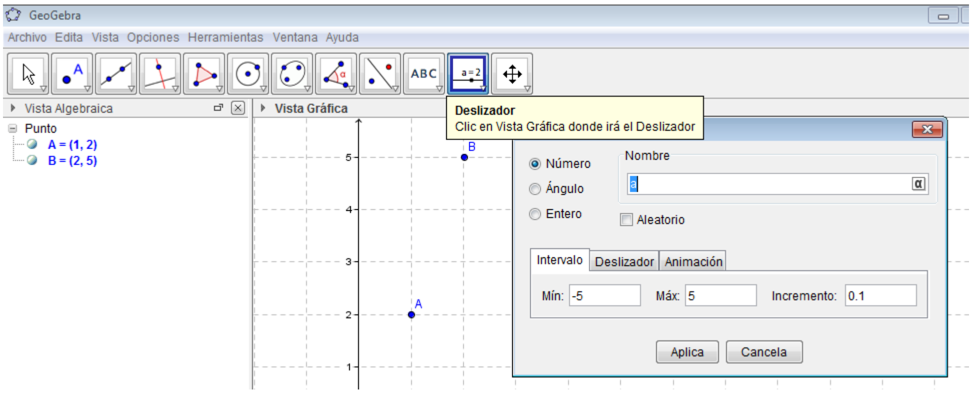


Figura 7.4: Creando un deslizador en GeoGebra

La herramienta **Deslizador** crea un parámetro que tiene, entre otros atributos:

- Un nombre: GeoGebra propone un nombre por defecto, generalmente la primera letra que no tiene asignada otra definición. Si no hay ningún objeto previamente definido, el nombre propuesto es “a”.
- Un intervalo de definición: es el valor mínimo y el máximo que podrá tomar ese parámetro. Por defecto, el mínimo es -5 y el máximo es 5.
- Un incremento, que es la medida de los saltos que puede dar el parámetro moviéndose entre los valores mínimo y máximo.

Todos estos atributos se pueden modificar a mano. Este es el tipo de conocimiento que no se adquiere de la mejor manera leyendo este texto, sino experimentando frente a la computadora. En concreto, lo que se ve en la pantalla es un segmento horizontal con un puntito que se puede arrastrar de un extremo al otro mediante el mouse, siempre y cuando esté antes seleccionada la herramienta **Elige y Mueve**.

Los pasos de toda la construcción, en orden, son los siguientes:

(i) Crear los puntos $A = (1, 2)$ y $B = (2, 5)$.

(ii) Crear un deslizador a.

(iii) Ingresar en el **Campo de Entrada** la ecuación (7.16). Importante: la escritura adecuada para $f(x) = ax^2 + (3 - 3a)x + (2a - 1)$ es `f(x)=a x^2+(3-3 a)x+(2 a-1)`. Observar que es necesario dejar un espacio entre la “`a`” y los números o variables que se multiplican por “`a`”. Si escribiéramos “`ax`” en vez de “`a x`” GeoGebra entendería que nos estamos refiriendo a un objeto llamado “`ax`” que no tiene definido y aparecerá una ventana de error. También se puede representar la multiplicación mediante el símbolo “*” y escribir “`a*x`”. Esto nunca conduce a contradicciones.

GeoGebra graficará una parábola que pasa por A y B, la que corresponde al valor $a = 1$ del deslizador, pues ése es el valor con el que aparece apenas ha sido creado.

Seleccionando ahora la herramienta **Elige y Mueve** pueden mover el deslizador en el rango [-5,5] en el que fue definido y observar la familia de parábolas que pasan por los puntos A y B. Esta observación es la que debería ayudar a comprender por qué al deducir la ecuación (7.16) el valor de a no quedó determinado: son infinitas las parábolas que pasan por A y B.

¿A ver si comprendí? En realidad lo que se ha hecho ha sido bastante más de lo mínimo que se pedía para resolver la parte *b*) del problema. En efecto, lo que se pedía era hallar *una* parábola que pasara por los puntos A y B. Nosotros, en cambio, hemos encontrado una manera de describir las infinitas parábolas que pasan por los puntos A y B. Si nos conformáramos con una sola de ellas, bastaría con elegir un punto cualquiera P, inventando sus coordenadas, y luego seguir el procedimiento indicado en la solución de la parte *a*), en la que los datos eran tres puntos.

(i) Inventen un punto P y utilícenlo para determinar una parábola que pasa por A y B.

(ii) ¿Qué cuidado especial deben tener al elegir el punto P? ¿Qué tipo de elección podría no conducirlos a resolver el problema?

En el recuadro «**¿A ver si comprendí?**» de la página 59 se pedía interpretar el caso especial $a = 0$. Si no pudieron responderlo en ese momento, intenten hacerlo ahora, con ayuda de esta construcción de GeoGebra.

c) Acá se pide hallar la parábola que pasa por $A = (1, 2)$, $B = (2, 5)$ y $D = (-1, -4)$. Al resolverlo por el **Camino 1** obtuvimos la ecuación $f(x) = 3x - 1$, que no era una parábola. En la Figura 7.5 se observa a los puntos A, B y D graficados en GeoGebra. Los que no lo hayan comprendido antes, pueden observar allí la explicación del fenómeno: los puntos están alineados y, por lo tanto, no pueden determinar una parábola. Apenas determinan una recta y es por eso que la solución analítica nos llevó a que, en la ecuación $f(x) = ax^2 + bx + c$ resultara $a = 0$.

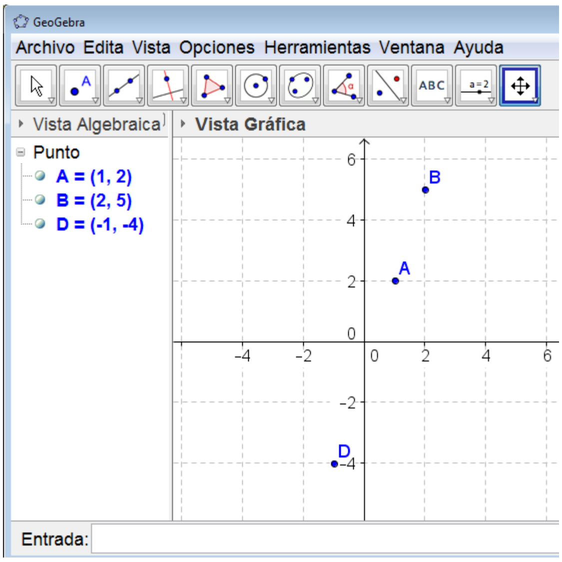


Figura 7.5

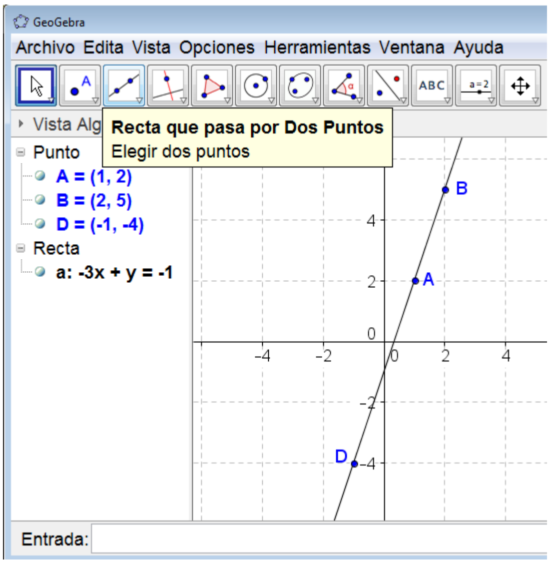


Figura 7.6

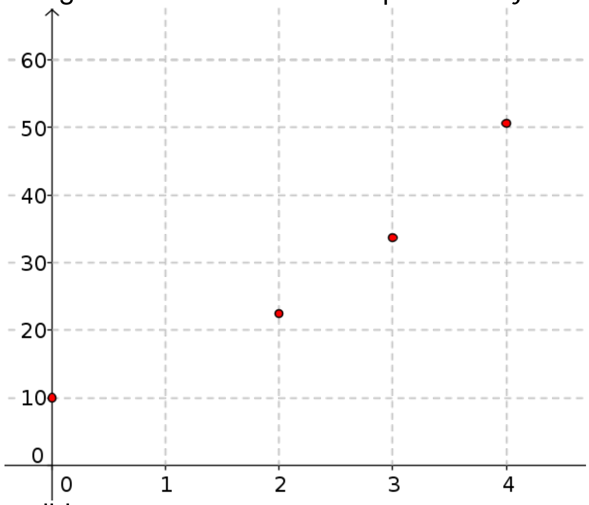
Seleccionando la herramienta **Recta que pasa por Dos Puntos** y haciendo clic en dos cualesquiera de los tres puntos, GeoGebra traza la recta que se ve en la Figura 7.6 y escribe su ecuación en la Vista Algebraica. La ecuación que aparece en la figura es $-3x + y = -1$ que, por supuesto, es equivalente a la ecuación $y = 3x - 1$ que habíamos obtenido.

Problema 14: La figura muestra algunos puntos del gráfico de una función exponencial f.

a) Estimen, mirando el gráfico, el valor de $f(2,3)$.

b) Escriban la fórmula de una función f que se corresponda con el gráfico.

c) Calculen $f(2,3)$ y comparen con el punto a).



Solución: Exploraremos también dos caminos posibles.
Camino 1: "Puramente algebraico"

a) Para esta parte podemos observar el gráfico y –sabiendo el tipo de curva que corresponde a una función exponencial– trazar la curva que pase por los puntos dados. Esto puede hacerse escribiendo a mano sobre el papel o bien imaginando la curva *mentalmente*. En la Figura 7.7 se ilustra ese trazo aproximado y un valor de $f(2,3)$ que puede estimarse a partir de él.

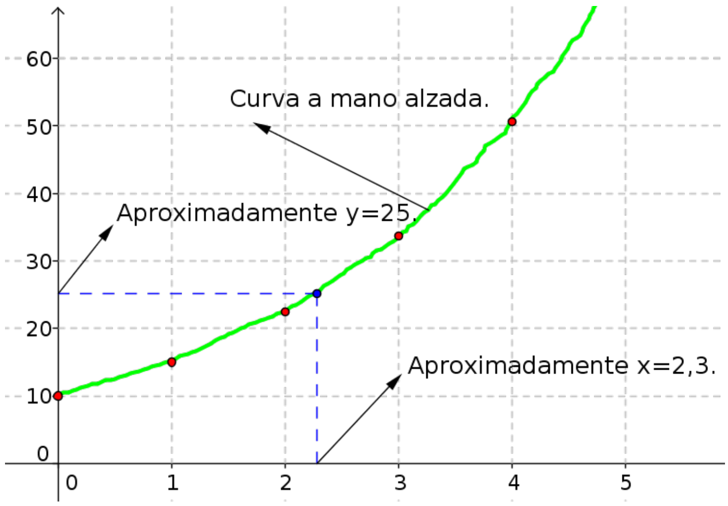


Figura 7.7: Trazo aproximado de la curva en el que se puede estimar $f(2,3) \cong 25$.

Desde luego, la estimación está sujeta a muchas fuentes de error: el trazo de la curva es aproximado y también son aproximadas "a ojo" las coordenadas x e y, pues sus valores no están escritos en la escala que tienen los ejes.

b) Si los puntos graficados realmente corresponden a una función exponencial, deberán responder a una fórmula del tipo $f(x) = a \cdot b^x$, donde a y b son números reales que se deben determinar. Como se trata de dos números a determinar, debería bastar con recurrir a dos ecuaciones. Para eso, elegimos dos puntos de los graficados. Por ejemplo, consideremos los puntos $P_1 = (0,10)$ y $P_2 = (2,22,5)$[6]. Que estos puntos estén en el gráfico de f

[6]No confundir la coma (,) decimal con la coma (,) que separa las dos coordenadas del punto P_2. En la escritura de textos, como es este caso, se suele evitar esta confusión escribiendo $P_2 = (2;22,5)$. Pero en GeoGebra el uso

significa que es

$$f(0) = 10 \qquad \text{y} \qquad f(2) = 22{,}5$$

Esto lleva a las ecuaciones:

$$a \cdot b^0 = 10 \tag{7.24}$$
$$a \cdot b^2 = 22{,}5 \tag{7.25}$$

De la ecuación (7.24) se desprende inmendiatamente que es $a = 10$. Poniendo este valor en la ecuación (7.25) se obtiene $10 \cdot b^2 = 22{,}5$, es decir:

$$b^2 = 2{,}25$$

Se trata de determinar un número positivo b que elevado al cuadrado da por resultado 2.25. Esto es equivalente a decir que b es la raíz cuadrada de 2.25:

$$b^2 = 2{,}25 \Leftrightarrow b = \sqrt{2{,}25} = 1{,}5$$

Por lo tanto, la función buscada tiene por ecuación:

$$f(x) = 10 \cdot 1,5^x$$

Esto será correcto si los demás puntos del gráfico también verifican la ecuación. Queda para ustedes aplicar la fórmula a esos puntos con una calculadora (que puede ser el mismo GeoGebra) y hacer la verificación.

Hay que observar que el despeje de a fue especialmente sencillo debido a que en la ecuación (7.24) resulta $b^0 = 1$. Esto resultó posible porque se sabía que el punto $P_1 = (0, 10)$ está en el gráfico de f. Supongamos que ese punto no era un dato y que debíamos recurrir a otros dos puntos para deducir la ecuación de f. Podríamos considerar, por ejemplo, los puntos

$$P_3 = (3, 33{,}75) \text{ y } P_4 = (4, 50{,}625)$$

Que estos puntos estén en el gráfico de f significa que es

$$f(3) = 33{,}75 \qquad \text{y} \qquad f(4) = 50{,}625$$

Esto, como antes, lleva a las ecuaciones:

$$a \cdot b^3 = 33{,}75 \tag{7.26}$$
$$a \cdot b^4 = 50{,}625 \tag{7.27}$$

Una manera de trabajar con estas dos ecuaciones es dividirlas miembro a miembro. Supongamos que P, Q, R y S son números distintos de 0. Si $P = Q$ y $R = S$ entonces $\frac{P}{R} = \frac{Q}{S}$. Llevando esta idea a las ecuaciones (7.26) y (7.27) resulta:

$$\frac{a \cdot b^4}{a \cdot b^3} = \frac{50{,}625}{33{,}75}$$

del punto (.), la coma (,) y el punto y coma (;) tienen significados muy precisos y no se puede elegir simplemente lo que “nos gusta más”: las coordenadas de los puntos se separan obligatoriamente con coma (,) y para la coma decimal se usa el punto (.), con lo cual la escritura textual correcta es P_2=(2, 22.5).

es decir:

$$\frac{b^4}{b^3} = 1{,}5$$

Pero $\frac{b^4}{b^3} = b^{4-3} = b^1 = b$. Por lo tanto, hemos obtenido otra vez $b = 1{,}5$, lo que muestra que elegir otro par de puntos nos llevaría a obtener la misma ecuación que antes.

> **¿A ver si comprendí?** Elijan otros dos puntos del gráfico e intenten volver a obtener la ecuación de f.

c) Finalmente, con la fórmula obtenida, podemos calcular $f(2{,}3)$ para compararlo con nuestro valor estimado. Recordemos que habíamos estimado $f(2{,}3) = 25$. Ahora, con una calculadora, obtenemos:

$$f(2{,}3) = 10 \cdot 1{,}5^{2{,}3} \cong 25{,}410306048$$

que no es tan lejano al valor que habíamos estimado.

Camino 2: "GeoGebra."

GeoGebra tiene poderosas herramientas para determinar funciones que pasen por una colección de puntos o bien que se aproximen *lo mejor posible* a ellos. Es valioso conocer el recurso, aunque es indispensable no depender de él. El manejo algebraico que se ilustró en la solución anterior puede resultar más trabajoso, pero es en algún punto más conceptual. El que solo puede recurrir a un software que manipula a ciegas, sin comprender lo que está sucediendo, tiene pocos recursos para adaptarse a situaciones nuevas e intentar resolverlas.

No daremos un paso a paso detallado de cómo usar estas herramientas, pero indicaremos en líneas generales cuáles son, para que los interesados las investiguen.

En primer lugar hay que crear en GeoGebra los puntos que en el enunciado aparecen graficados. Esto puede hacerse desde la **Barra de Entrada**, escribiendo, por ejemplo `A=(0,10)`, etc.

Otra forma de hacerlo es crear dos columnas en la **Hoja de Cálculo** de GeoGebra en las que estén los datos:

	A	B	C
1	0	10	
2	1	15	
3	2	22.5	
4	3	33.75	
5	4	50.625	

Luego pintar las dos columnas con el mouse, hacer clic con el botón secundario y elegir la opción **Crear** $\longrightarrow$ **Lista de puntos**. Con esto los puntos aparecerán en la **Vista Gráfica** (desde luego, hay que acomodar la escala de los ejes y/o el zoom para que queden a la vista). Además, en la **Vista Algebraica** se podrá apreciar la aparición de un objeto llamado "lista1", que consiste en la lista de puntos creados: (0,10); (1,15); etc.

Ahora llega el momento de pedirle a GeoGebra que busque la función exponencial que pasa *más cerca* de esos puntos. Para eso, en la **Barra de Entrada** escribimos el comando **AjusteBaseExp[ ]**. Podrán observar que, a medida que escribimos las primeras letras del comando, A...j...u, GeoGebra nos va sugiriendo los posibles comandos cuyos nombres comienzan de esa manera. Esto es muy útil, por un lado para no tener que recordar el nombre exacto de cada comando y, por otra parte, para enterarnos de la existencia de otros comandos y poder investigarlos y conocerlos. El comando **AjusteBaseExp[ ]** le indica a GeoGebra que debe buscar la función exponencial que mejor se ajuste a la lista de puntos que le indiquemos y que debe escribirse entre los corchetes. Entre esos corchetes se puede listar, separados por coma, los nombres de los puntos `A,B,C`, etc. o bien se puede escribir directamente `lista1`, con lo que GeoGebra comprenderá que nos referimos a todos los puntos que conforman esa lista creada. Al darle Enter, la curva aparecerá graficada y su fórmula podrá verse en la **Vista Algebraica**.

Un aspecto verdaderamente conceptual de esta herramienta no podrá apreciarse en este ejemplo: los puntos que ingresamos como dato estaban en una relación exponencial y, por lo tanto, les corresponde exactamente una función exponencial a la que pertenecen. ¿Qué hubiese sucedido si los puntos no correspondían exactamente a una función exponencial? Ustedes pueden investigarlo seleccionando la herramienta **Elige y Mueve** y cambiando desde la vista gráfica la posición de alguno de los puntos. Háganlo e intenten interpretar lo que sucede. Luego consúltenlo con sus profesores en la clase.

¿A ver si comprendí? Si comienzan a tipear la palabra “Ajuste” en el **Campo de Entrada** verán que, además de **AjusteBaseExp**, aparecen otras alternativas, como **AjusteLineal**, **AjustePolinómico**, etc.
(i) En el **Problema 19** tuvieron que encontrar la fórmula de una función lineal cuyo gráfico pasaba por algunos puntos dados. Investiguen el comando **AjusteLineal** para obtener la fórmula mediante GeoGebra y observen si se trata de la misma fórmula que obtuvieron al resolver aquel problema.
(ii) En el **Problema 13** tuvieron que encontrar la fórmula de una función cuadrática cuyo gráfico pasaba por algunos puntos dados. Recuerden que una función cuadrática es una función polinómica de grado 2 e investiguen el comando **AjustePolinómico** para obtener la fórmula mediante GeoGebra. Luego observen si se trata de la misma fórmula que obtuvieron al resolver aquel problema.

Bibliografía

[1] Silvia Altman, Claudia Comparatore, and Liliana Kurzrok. *Análisis 1*. Editorial Longseller, 2008.

[2] Silvia Altman, Claudia Comparatore, and Liliana Kurzrok. *Análisis 2*. Editorial Longseller, 2008.

[3] Tom M. Apostol. *Calculus Vol. 1*. Reverté, 1999.

[4] Dan Ariely. *Las trampas del deseo: Cómo controlar los impulsos irracionales que nos llevan al error*. Editorial Ariel, 2008.

[5] Boris Demidovich. *Problemas y ejercicios de análisis*. Paraninfo, 2000.

[6] Deborah Hughes-Hallett, Andrew M. Gleason, and et al. *Cálculo aplicado*. CECSA, 1999.

[7] Ricardo Noriega. *Cálculo diferencial e integral*. Editorial Docencia, 2013.

[8] Manuel Sadosky and Rebeca Guber. *Elementos de cálculo diferencial e integral*. Alsina, 2010.

[9] Claudio Salpeter. *Confluencias Matemática 3 ES*. Estrada, 2011.

[10] Michael Spivak. *Calculus*. Reverté, 2003.

[11] James Stewart. *Cálculo de una variable*. Cengage Learning/Thomson International, 2008.

Índice general

editora
UNIVERSIDAD NACIONAL DE MORENO

MATERIAL DE DISTRIBUCIÓN GRATUITA

ISBN 978-987-3700-59-0

Universidad Nacional de Moreno
Av. Bartolomé Mitre N° 1891, Moreno (B1744OHC), prov. de Buenos Aires, Argentina
(0237) 466-7186 / 1529 / 4530
(0237) 488-3151 / 3147 / 3473
(0237) 425-1786 / 1619
(0237) 462-8629
(0237) 460-1309
www.unm.edu.ar
www.facebook.com/unimoreno

UNM 2010
UNIVERSIDAD DEL
BICENTENARIO
ARGENTINO