UNIVERSIDAD
NACIONAL
DE MORENO

ANÁLISIS MATEMÁTICO (2214)

GUÍA DE PROBLEMAS

LICENCIATURA EN BIOTECNOLOGÍA

2019

Departamento de Ciencias Aplicadas y Tecnología

UNIVERSIDAD NACIONAL DE MORENO

Rector
Hugo O. ANDRADE

Vicerrector
Manuel L. GÓMEZ

SECRETARIAS RECTORADO

Secretaria Académica
Roxana S. CARELLI

Secretaria de Investigación, Vinculación Tecnológica y Relaciones Internacionales
Adriana M. del H.SÁNCHEZ

Secretario de Extensión Universitaria
Alejandro A. OTERO a/c

Secretaria de Administración
Graciela C. HAGE

Secretario Legal y Técnico
Guillermo E. CONY

Secretario General
Alejandro A. OTERO

CONSEJO SUPERIOR

Autoridades
Hugo O. ANDRADE
Manuel L. GÓMEZ
Jorge L. ETCHARRÁN
Pablo A. TAVILLA
Roberto C. MARAFIOTI

Consejeros
Claustro docente:
M. Beatriz ARIAS
Adriana A. M. SPERANZA
Cristina V. LIVITSANOS (s)
Adriana M. del H. SANCHEZ (s)

Claustro estudiantil
Cecilia B. QUIROGA
Lucia E. FERNANDEZ

Claustro no docente
C. Fabian DADDARIO

DEPARTAMENTO DE CIENCIAS APLICADAS Y TECNOLOGÍA

Director - Decano
Jorge L. ETCHARRÁN

Ingeniería en Electrónica
Coordinador - Vicedecano
Gabriel F.C. VENTURINO

Licenciatura en Gestión Ambiental
Coordinador-Vicedecano
Leónidas O. GIRARDIN

Arquitectura
Coordinadora - Vicedecana
N. Elena TABER

Licenciatura en Biotecnología
Coordinador - Vicedecano
Fernando C. RAIBENBERG

DEPARTAMENTO DE ECONOMÍA Y ADMINISTRACIÓN

Director - Decano
Pablo A. TAVILLA

Licenciatura en Relaciones del Trabajo
Coordinadora-Vicedecana
Sandra M. PÉREZ

Licenciatura en Administración
Coordinador - Vicedecano
Marcelo A. MONZÓN

Licenciatura en Economía
Coordinador - Vicedecano
Alejandro L. ROBBA

Contador Público Nacional
Coordinador - Vicedecano
Alejandro A. OTERO

DEPARTAMENTO DE HUMANIDADES Y CIENCIAS SOCIALES

Director - Decano
Roberto C. MARAFIOTI

Licenciatura en Trabajo Social
Coordinadora - Vicedecana
M. Claudia BELZITI

Licenciatura en Comunicación Social
Coordinadora - Vicedecana
Adriana A. M. SPERANZA a/c

Área de Educación
Coordinadora-Vicedecana
Lucía ROMERO

ANÁLISIS MATEMÁTICO (2214)

GUÍA DE PROBLEMAS

LICENCIATURA EN BIOTECNOLOGÍA

2019

UNIVERSIDAD
NACIONAL
DE MORENO

Nicodemo, Mauro
Análisis Matemático (2214) Guía de problemas 2019 / Licenciatura en Biotecnología
Mauro Nicodemo ; Rosa María Escayola ; Ana Laura Fernández.
2a ed . - Moreno : UNM Editora, 2019.

Libro digital, PDF - (Cuadernos de cátedra)
Archivo Digital: descarga

ISBN 978-987-782-011-9
1. Análisis Matemático. I. Escayola, Rosa María II. Fernández, Ana Laura III. Título
CDD 515

Colección: Cuadernos de Cátedra
Directora: Roxana S. CARELLI

Autores: Mauro NICODEMO
Rosa María ESCAYOLA
Ana Laura FERNÁNDEZ

Colaborador: Diego MELCHIORI

Lectura crítica: Pablo E. COLL
Fernando CHORNY

Las imágenes que integran esta publicación pertenecen a los autores.

2da. Edición ©UNM Editora, 2019.
Av. Bartolomé Mitre N° 1891, Moreno (B1744OHC), Prov. de Buenos Aires, Argentina.
(+54 237) 466-1529/4530/7186
(+54 237) 488-3147/3151/3473
(+54 237) 425-1619/1786
(+54 237) 460-1309
(+54 237) 462-8629
Interno: 154
unmeditora@unm.edu.ar
ISBN (versión digital): 978-987-782-011-9

La edición en formato digital de esta obra se encuentra disponible en:
www.unm.edu.ar/index.php/unm-virtual/ biblioteca-digital

www.unmeditora.unm.edu.ar/index.php/colecciones/cuadernos-de-catedra

MATERIAL DE DISTRIBUCIÓN GRATUITA

REUN
RED DE EDITORIALES DE UNIVERSIDADES NACIONALES

editora
UNIVERSIDAD NACIONAL DE MORENO

L U
Libro Universitario Argentino

Parte I

Análisis de valores

Unidad 1: Sucesiones

Convergencia, aproximación infinitesimal y límites.

Fórmulas y gráficos

Problema 1 Realizá un gráfico aproximado de las siguientes funciones:

a) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \quad / \quad f(n) = 3n - 2$

b) $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \quad / \quad g(n) = 4(n - \frac{7}{2})^2 + 3$

c) $h : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \quad / \quad h(n) = -3(n-1)(n+3)(n-\frac{1}{2})$

d) $j : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \quad / \quad j(n) = 10\left(\frac{1}{3}\right)^n + 13$

e) $k : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \quad / \quad k(n) = -2\,\mathrm{sen}\left(n\frac{\pi}{2}\right)$

El **límite de una sucesión** se puede definir de manera *coloquial* como el número al que "se van acercando" los términos de la sucesión (a_n) a medida que aumenta el número de término (n). Si al **límite de la sucesión** lo llamamos l, se puede escribir:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = l \qquad \text{ó} \qquad a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$$

Problema 2 Calculá los límites de las sucesiones.

- $a_n = 3n - 2$
- $b_n = 4(n - \frac{7}{2})^2 + 3$
- $c_n = -3(n-1)(n+3)(n-\frac{1}{2})$
- $d_n = 10\left(\frac{1}{3}\right)^n + 13$
- $e_n = -2\,\mathrm{sen}\left(n\frac{\pi}{2}\right)$

Problema 3 Calculá el límite de cada una de las sucesiones.

a)

- $a_n = \frac{1}{n}$
- $b_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$
- $c_n = 5 + \frac{1}{n}$
- $d_n = 3 + (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$

b)

- $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$
- $b_n = (-1)^n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$
- $c_n = -3 + \left(\frac{1}{2}\right)^n$
- $d_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n + 5$

c)

- $a_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n$
- $b_n = (-1)^n \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n$
- $c_n = -3 + \left(\frac{3}{2}\right)^n$
- $d_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n + 5$

Estudio de límites

Problema 4 Considerá la sucesión:

$$a_n = r^n$$

¿Para qué valores de r la sucesión es convergente y para qué valores es divergente?

Calculá el límite de las sucesiones suponiendo valores de r para los cuales r^n es convergente y valores para los cuales es divergente.

- $a_n = r^n - 4$
- $b_n = 3 \cdot r^n + 5$
- $c_n = \frac{1}{r^n}$
- $d_n = r^n + r^{(-n)}$

Problema 5 Para cada una de las siguientes sucesiones, realizá un gráfico en el plano cartesiano y un gráfico en la recta numérica. Luego calculá su límite.

- $a_n = \left(\frac{1}{10}\right)^n$
- $b_n = 5 + \left(\frac{1}{10}\right)^n$
- $c_n = -3 + \left(\frac{1}{10}\right)^n$
- $d_n = 8 - \left(\frac{1}{10}\right)^n$

Problema 6 Calculá los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n+3}{n}$

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n-1}{2n}$

c) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{2}{3}\right)^n + 6$

d) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{5}{4}\right)^n - 4$

e) $\lim\limits_{n\to+\infty} -7\left(\dfrac{4}{3}\right)^n + 4$

f) $\lim\limits_{n\to+\infty} -3\left(\dfrac{4}{5}\right)^n - 5$

> El límite de una sucesión a_n es l, es decir $\lim_{n\to+\infty} a_n = l$, si y sólo si:
>
> $$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } \forall n \geq n_0, |a_n - l| < \varepsilon$$
>
> *Para todo ε (épsilon) mayor a cero, existe un n_0 (ene cero) pertenenciente a los números naturalales (ℕ) tal que para todo n (ene) mayor o igual a n_0, la distancia entre el término enésimo de la sucesión (a_n) y el límite (l) es menor que ε.*

Problema 7 Utilizando la definición de límite y GeoGebra, estudiá la existencia de los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n$

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{n^2}$

c) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{n^2+1}{n^2}\right)^n$

d) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{2n}$ e) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n}$ f) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n^2}$

Problema 8 En cada caso definí el término general de una sucesión a_n que cumpla con lo pedido.

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 2$

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = -3$

c) $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \frac{1}{5}$

d) $a_0 = -9$ y a_n sea divergente.

e) a_n no converja ni diverja.

f) $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = e^3$

g) $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$

h) a_n sea oscilante y convergente.

i) a_n sea oscilante y divergente.

Sucesiones y funciones

Problema 9 Sean:

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \quad \text{tal que} \quad f(x) = 3x^2+1$$

- $a_n = 2 + \left(\frac{1}{10}\right)^n$
- $b_n = \left(\frac{4}{3}\right)^n$
- $c_n = -3 + \left(\frac{1}{10}\right)^n$
- $d_n = -n$

calculá los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} f(a_n)$ b) $\lim\limits_{n\to+\infty} f(b_n)$ c) $\lim\limits_{n\to+\infty} f(c_n)$ d) $\lim\limits_{n\to+\infty} f(d_n)$

Problema 10 Estudiá los límites de las siguientes sucesiones.

- $a_n = 2\pi\cdot n + \frac{\pi}{n}$
- $b_n = 2\pi\cdot n + (-1)^n\cdot\frac{\pi}{n}$
- $c_n = \operatorname{sen}(a_n)$
- $d_n = \operatorname{sen}(b_n)$
- $k_n = \cos(a_n)$
- $l_n = \cos(b_n)$

Unidad 2: Límite de funciones

Asíntotas y continuidad.

Límites puntuales

Problema 1 Considerando las funciones y sucesiones del **Problema 9** de la **Unidad 1**, completá los puntos suspensivos del límite de manera que sea verdadera la igualdad.

a) $\lim\limits_{x\to\ldots} 3x^2+1 = \lim\limits_{n\to+\infty} f(a_n)$

b) $\lim\limits_{x\to\ldots} 3x^2+1 = \lim\limits_{n\to+\infty} f(b_n)$

c) $\lim\limits_{x\to\ldots} 3x^2+1 = \lim\limits_{n\to+\infty} f(c_n)$

d) $\lim\limits_{x\to\ldots} 3x^2+1 = \lim\limits_{n\to+\infty} f(d_n)$

Problema 2 Calculá los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{1}{x-2} =$

b) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{1}{(x-2)^2} =$

c) $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{-5}{x+3} =$

d) $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{-5}{x-3} =$

e) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x+1}{x-1} =$

f) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{x+1} =$

Una **definición** posible para el **límite puntual** de una función.

$$\lim_{x\to a} f(x) = l \iff \forall (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ tal que } \lim_{n\to+\infty} a_n = a,\ \lim_{n\to+\infty} f(a_n) = l$$

Primer **corolario**: si una función tiene límite en un punto a, entonces ese límite se puede calcular como la composición entre la función y una sucesión que tienda a a.

Segundo **corolario**: si existen dos sucesiones que ambas tienden a a y las composiciones entre una función y las sucesiones tienen límites distintos, entonces la función no tiene límite en a.

Asíntotas

Problema 3 Calculá los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{x\to-1} \dfrac{2}{x+1} =$

b) $\lim\limits_{x\to-1} \dfrac{1}{(x+1)^2} =$

c) $\lim\limits_{x\to-2} \dfrac{x^2-4}{x+2} =$

d) $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{x^2-4}{x+2} =$

e) $\lim\limits_{x\to3} \dfrac{x-3}{x^2-9} =$

f) $\lim\limits_{x\to-3} \dfrac{x-3}{x^2-9} =$

g) $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{x+2}{x-2} =$

h) $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{x-2}{x+2} =$

i) $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{sen}(x) =$

j) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x} =$

k) $\lim\limits_{x\to+\infty} 2\left(\dfrac{1}{3}\right)^x + 4 =$

l) $\lim\limits_{x\to-\infty} 2\left(\dfrac{1}{3}\right)^x + 4 =$

m) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{2}e^x - 4 =$

n) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{2}e^x - 4 =$

> Se dice que la función f posee una **asíntota vertical** en $x = x_0$ si y solo si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$. (Notar que el símbolo que representa al infinito no tiene signo.)
>
> Se dice que la función f posee una **asíntota horizontal** en $+\infty$ de ecuación $y = y_0$ si y solo si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = y_0$. De manera análoga se define la **asíntota horizontal** en $-\infty$.

Problema 4 Hallá el dominio natural y las asíntotas de las funciones del **Problema 3**.

Límites con polinomios

Problema 5 Calculá los siguientes límites y hallá las asíntotas horizontales de las funciones, en caso de que tengan.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 - 3x^2 + x + 1 =$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 - 3x^2 + x + 1 =$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{5}{x^2+2x-9} =$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1000000}{x^2+2x-9} =$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3-3x^2+x+1}{x^2+2x-3} =$

f) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^3-3x^2+x+1}{x^2+2x-3} =$

g) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3-3x^2+x+1}{x^4+5x^3-x-5} =$

h) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^3-3x^2+x+1}{x^4+5x^3-x-5} =$

i) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3-3x^2+x+1}{2x^3-3x^2+x-4} =$

j) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^3-3x^2+x+1}{2x^3-3x^2+x-4} =$

k) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-5x^2+6x+8}{3x^2-4x-4} =$

l) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{7x^3+2x^2-3x-1}{4x+3} =$

m) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{7x^3+2x^2-3x-1}{4x+3} =$

Problema 6 Hallá el dominio natural y las asíntotas verticales de las funciones del **Problema 5** utilizando GeoGebra.

Continuidad

Problema 7 Sea

$$f : \mathbb{R} - \{-2\} \to \mathbb{R} \quad / \quad f(x) = \frac{x^2-4}{x+2}$$

si quisieras extender el dominio de la función a todo $\mathbb{R}$, ¿qué valor elegirías para $f(-2)$?

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x+2} & \text{si} \quad x \neq -2 \\ \boxed{\ldots} & \text{si} \quad x = -2 \end{cases}$$

Problema 8 Sea

$$g : \mathbb{R} - \{3\} \to \mathbb{R} \quad / \quad f(x) = \frac{2}{x-3}$$

si quisieras extender el dominio de la función a todo $\mathbb{R}$, ¿qué valor elegirías para $f(3)$?

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x-3} & \text{si} \quad x \neq 3 \\ \boxed{\ldots} & \text{si} \quad x = 3 \end{cases}$$

Se dice que la función f es **continua** en $x = x_0$, con $x_0 \in \text{Dom}(f)$, si y solo si

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Sea f una función y $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $x_0 \notin \text{Dom}(f)$, existen dos posibilidades:

- $\lim_{x \to x_0} f(x) = k \qquad k \in \mathbb{R}$
  El dominio de f se puede extender de manera continua en $x = x_0$ definiendo
  $$f(x_0) = k$$
  Se dice que f tiene una discontinuidad evitable en $x = x_0$.
- No existe $\lim_{x \to x_0} f(x)$
  El dominio de f no se puede extender de manera continua en $x = x_0$.
  Se dice que f tiene una discontinuidad esencial en $x = x_0$.

Problema 9

a) Para cada una de las siguientes fórmulas, hallá su dominio natural y definí una función con ese dominio.

- $\dfrac{x^2-16}{x-4}$
- $\dfrac{x-4}{x^2-16}$
- $\dfrac{x^2-5x+6}{x-2}$
- $\dfrac{x-2}{x^2-5x+6}$
- $\dfrac{x^3+3x^2+2x+6}{x+3}$
- $\dfrac{x^2+3x-4}{x^2+6x+8}$
- $\dfrac{2x^3-14x-12}{x^2-2x-3}$
- $\dfrac{x^3-7x-6}{x-3}$
- $\dfrac{-2x^3+3x^2+11x-6}{x-\frac{1}{2}}$
- $\dfrac{x^2-5x-14}{x-7}$

b) Para cada una de las funciones definidas en el ítem anterior, decidí para cuáles de los valores que no pertenecen a su dominio es posible extenderlas de manera que resulten continuas y redefinilas de esa manera.

Problema 10 Para cada caso trazá, si es posible, el gráfico de una función que cumpla simultáneamente con las condiciones dadas y respondé las preguntas.

a)
- $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-1; 4\}$
- $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$
- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 3$
- $f(-5) = 0$
- f tiene una discontinuidad esencial en $x_0 = 4$.
- $\lim_{x\to-1} f(x) = 5$
- $C^+(f) = (-5; 3{,}5) \cup (4; +\infty)$

¿Es verdad que f tiene una discontinuidad evitable en $x_0 = -1$?

b)
- $\mathrm{Dom}(g) = \mathbb{R}$
- $\lim_{x\to-\infty} g(x) = -\dfrac{2}{3}$
- No existe $\lim_{x\to+\infty} g(x)$
- $\lim_{x\to2} g(x) = 4$

¿Es verdad que g tiene una asíntota horizontal de ecuación $y = -\frac{2}{3}$?

c)
- $\mathrm{Dom}(h) = \mathbb{R} - \{-3; 3\}$
- $\lim_{x\to-\infty} h(x) = 5$
- $\lim_{x\to+\infty} h(x) = 5$
- $\lim_{x\to-3^-} h(x) = -\infty$
- $\lim_{x\to-3^+} h(x) = +\infty$
- $\lim_{x\to3^-} h(x) = +\infty$
- $\lim_{x\to3^+} h(x) = -\infty$
- $C^+(h) = (-\infty; -4) \cup (-3; 3) \cup (4; +\infty)$

¿Es verdad que h tiene dos asíntotas horizontales?

d)
- $\mathrm{Dom}(k) = (1; 7)$
- $\lim_{x\to1^+} k(x) = -3$
- $\lim_{x\to7^-} k(x) = 6$

¿Es verdad que k es continua en todo su dominio?
Suponiendo que k es continua en todo su dominio, ¿es verdad que k tiene por lo menos una raíz?

Parte II

Análisis de variaciones

Unidad 3: Derivada

Velocidades, razones de cambio y rectas tangentes

Velocidades

Problema 1 Dos automóviles comienzan a viajar por la misma ruta al mismo tiempo.

a) Del auto A se sabe que a la hora de haber partido se encontraba en el km 122, que a las 7 horas de haber partido se encontraba en el km 590 y que su velocidad fue constante durante todo el viaje.
   (i) ¿A qué velocidad viajó el auto A?
   (ii) ¿En qué km está la ciudad de donde partió?
   (iii) Si su viaje duró 8 horas, ¿hasta qué kilómetro llegó?
   (iv) ¿Es verdad que fue siempre a la misma velocidad?

b) Del auto B se sabe que su posición en la ruta en función del tiempo se puede calcular con la fórmula $g(x) = -2x^3 + 24x^2 + 100$.
   (i) ¿Es verdad que, al igual que el auto A, a la hora de haber partido el auto B se encontraba en el km 122 y que a las 7 horas de haber partido se encontraba en el km 590?
   (ii) ¿A qué velocidad viajó el auto B?
   (iii) ¿En qué km está la ciudad de donde partió?
   (iv) Si su viaje duró 8 horas, ¿hasta qué kilómetro llegó?
   (v) ¿Es verdad que fue siempre a la misma velocidad?

c) Para realizar comparando el comportamiento de ambos autos.
   (i) ¿Cuál fue la velocidad media de todo el viaje del auto B? ¿Y su velocidad media entre una hora y 7 horas luego de haber partido?
   (ii) Identificá intervalos de tiempo para los cuales la velocidad del auto A haya sido mayor a la velocidad del auto B y viceversa.
   (iii) ¿Existen instantes en los cuales ambos autos fueron a la misma velocidad? Si tu respuesta es afirmativa, decí aproximadamente en cuales. Si no, justificá por qué.
   (iv) ¿Cómo se podría calcular la **velocidad instantánea** del automovil B a las 4 horas de haber partido? ¿Y a las $6{,}5$ horas de haber partido?
   (v) Describí un procedimiento para calcular la **velocidad instantánea** del automovil B a las x_0 horas de haber partido.

Problema 2 Una pileta de natación que tiene una capacidad de 10000 litros se llena mediante una bomba. La siguiente tabla muestra la cantidad de litros de agua que había en la pileta para algunos momentos luego de haberse prendido la bomba.

minutos	litros
2	2000
5	2750

a) ¿A qué ritmo opera la bomba?

b) ¿Cuántos litros de agua tenía la pileta al momento de encender la bomba?

c) ¿Cuánto tiempo tardará en llenarse la pileta?

d) ¿Cuál es el gráfico que represente la cantidad de agua que habrá en la pileta en función del tiempo?

Problema 3 En otra ocasión, la bomba que se utilizaba para llenar la pileta del **Problema 2** se descompuso y funcionó de manera irregular hasta que dejó de andar. La fórmula $f(x) = -\frac{2}{3}x^3 + 20x^2 + 250x + 1000$ informa la cantidad de agua que había en la pileta (medida en litros) en función del tiempo (medido en minutos) desde que se prendió la bomba hasta el momento x_1 en que dejó de funcionar.

a) ¿Cuántos litros de agua tenía la pileta en el momento en que se encendió la bomba?

b) En el momento en que se encendió la bomba, ¿operaba a un menor o a un mayor ritmo que cuando funcionaba correctamente?

c) Identificá dos instantes en que la bomba operó a mayor ritmo y dos instantes en los cuales operó a menor ritmo de lo que debería haber operado.

d) ¿Es verdád que la bomba dejó de funcionar antes de los 30 minutos desde que se encendió?

e) ¿Es verdad que a los 24 minutos de haberse encendido la bomba ya había dejado de funcionar? ¿Y a los 25?

f) ¿Cuál es el valor de x_1? Definí un dominio para la fórmula de manera que la función resultante sea correcta para el problema.

g) Calculá el ritmo medio al que operó al bomba desde el momento en que se prendió hasta que dejó de funcionar.

Problema 4 Considerando el **Problema 1**, calculá diez velocidades instantáneas del auto *B* de manera que te permitan trazar un gráfico aproximado de la función que describe la velocidad instantánea del automóvil en cada instante x. Recordá que del auto *B* se sabe que su posición en la ruta en función del tiempo se puede calcular con la fórmula $g(x) = -2x^3 + 24x^2 + 100$.

Problema 5 Maxi sale de su casa a dar un paseo en bicicleta. El gráfico muestra la posición de Maxi respecto de su casa (medida en kilómetros) en función del tiempo (medido en horas).

Observá el gráfico y respondé las siguientes preguntas:

a) ¿En qué intervalos de tiempo Maxi se alejaba de su casa y en cuáles se acercaba?

b) ¿En qué instantes su velocidad fue 0?

c) ¿En qué intervalos de tiempo su velocidad fue positiva y en cuáles fue negativa? ¿Qué interpretación tiene en este contexto una velocidad negativa?

d) Buscando coherencia con las respuestas anteriores, dibujá a mano un gráfico aproximado de una función que represente la velocidad en función del tiempo.

e) La función que describe la posición de Maxi en función del tiempo responde a la fórmula $f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{5}{2}x^2$. Determiná la fórmula de la función derivada f'.

f) Volvé a analizar las preguntas anteriores considerando la información que brinda $f'(x)$.

Rectas tangentes

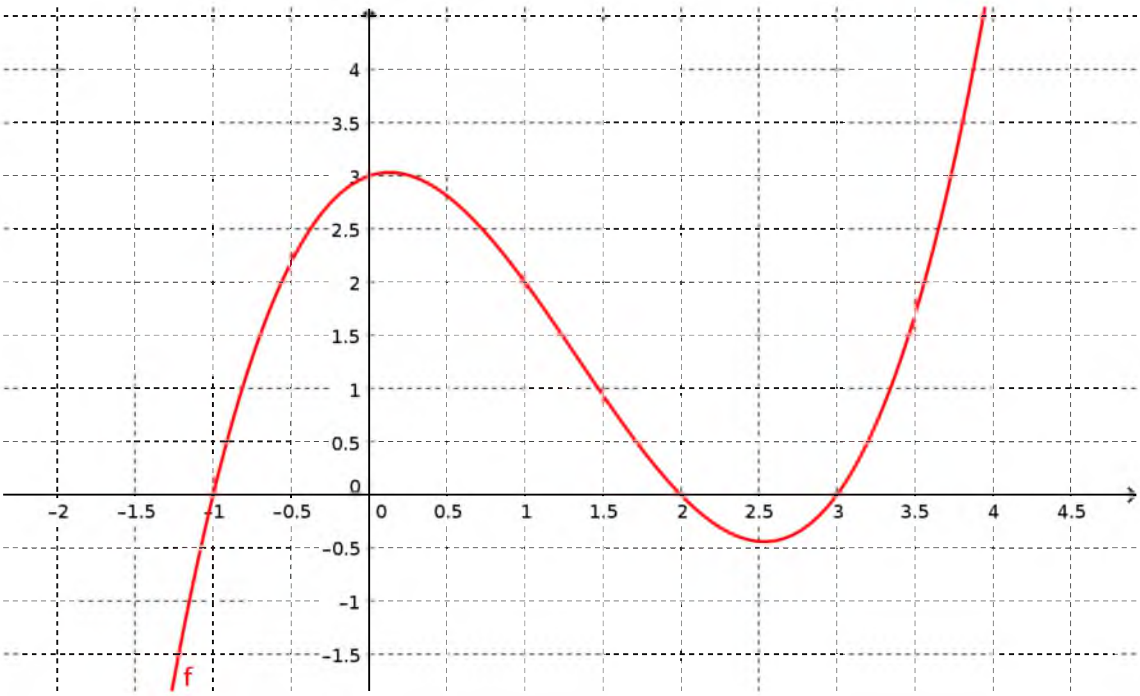
Problema 6 El gráfico mostrado corresponde a la función $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 2x^2 + \frac{1}{2}x + 3$.

a) Con una regla, de manera aproximada y sobre el gráfico de la función, trazá en cada caso una recta tangente que cumpla con lo pedido.

   (i) Su pendiente sea positiva y su ordenada al origen positiva.
   (ii) Su pendiente sea positiva y su ordenada al origen negativa.
   (iii) Su pendiente sea negativa y su ordenada al origen positiva.
   (iv) Su pendiente sea negativa y su ordenada al origen negativa.
   (v) Su pendiente sea 2.
   (vi) Su pendiente sea -2.
   (vii) Su pendiente sea $\frac{1}{2}$.
   (viii) Su pendiente sea $-\frac{1}{2}$.

b) Para cada una de las rectas marcadas:

   - indicá las coordenadas de su punto de tangencia;
   - calculá de manera análitica su ecuación;
   - compará el gráfico de la ecuación obtenida con el trazado originalmente.



Problema 7 Para cada caso, calculá las rectas tangentes a los graficos de las funciones en los valores indicados.

a) $f(x) = 3x^2 + 2x - 3$ en $x_0 = -1$, $x_0 = 0$ y $x_0 = 3{,}5$.
b) $g(x) = -x^2 + 2x - 5$ en $x_0 = x_v$ (x del vértice).
c) $h(x) = 3x^3 - \frac{3}{4}x^2 + 2$ en $x_0 = -2$, $x_0 = 1$ y $x_0 = \frac{1}{2}$.
d) $i(x) = -2x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 3x - 5$ en los puntos máximos y/o mínimos de la función.

Problema 8 Encuentrá los extremos locales de cada una de las siguientes funciones. ¿Son máximos o mínimos locales? ¿Cómo lo pueden decidir?

a) $f(x) = \frac{1}{5}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - x + 1$
b) $f(x) = -\frac{1}{5}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x - 1$
c) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x$

Problema 9 Para la función $f(x) = -x^3 + 2x^2 - x + 1$, calculá la recta tangente a su gráfico que posee la mayor pendiente.

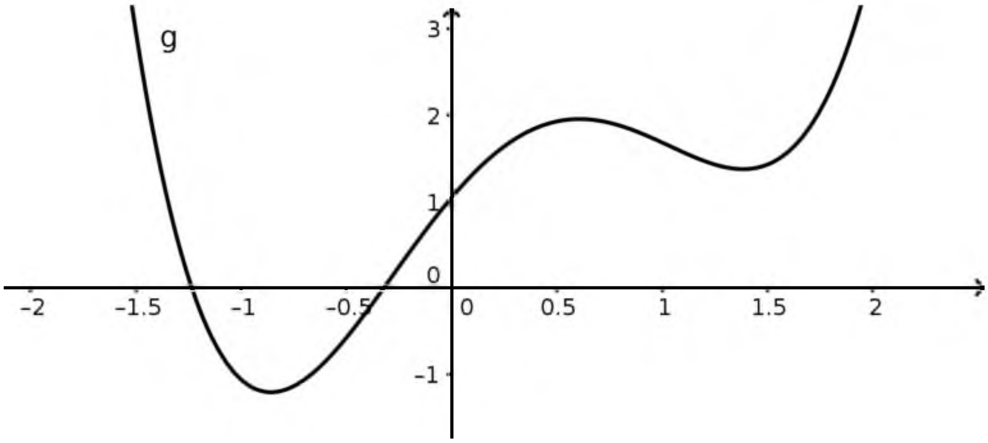
¿Es verdad que no existe una recta tangente al gráfico de la función que posea la menor pendiente?

Problema 10 Hallá el $I^{\uparrow}$, el $I^{\downarrow}$, los extremos (indicando si son relativos o absolutos) de cada función y los puntos donde la recta tangente al gráfico de la función tiene mayor o menor pendiente posible. Para las funciones que incluyen senos, describilos verbalmente.

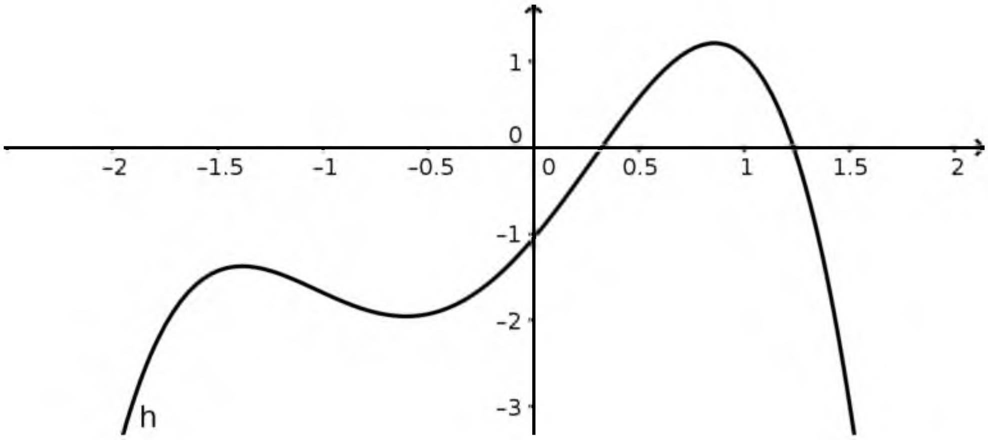
- $f(x) = x \cdot e^x$
- $g(x) = e^{-x^2}$
- $h(x) = \dfrac{1}{1 + e^{-x}}$
- $j(x) = \dfrac{\text{sen}(x)}{x}$
- $k(x) = \ln(x^2 + 1)$
- $l(x) = x^2 \cdot \text{sen}(x)$
- $q(x) = \dfrac{2400 + 2x^3}{x}$

Problema 11

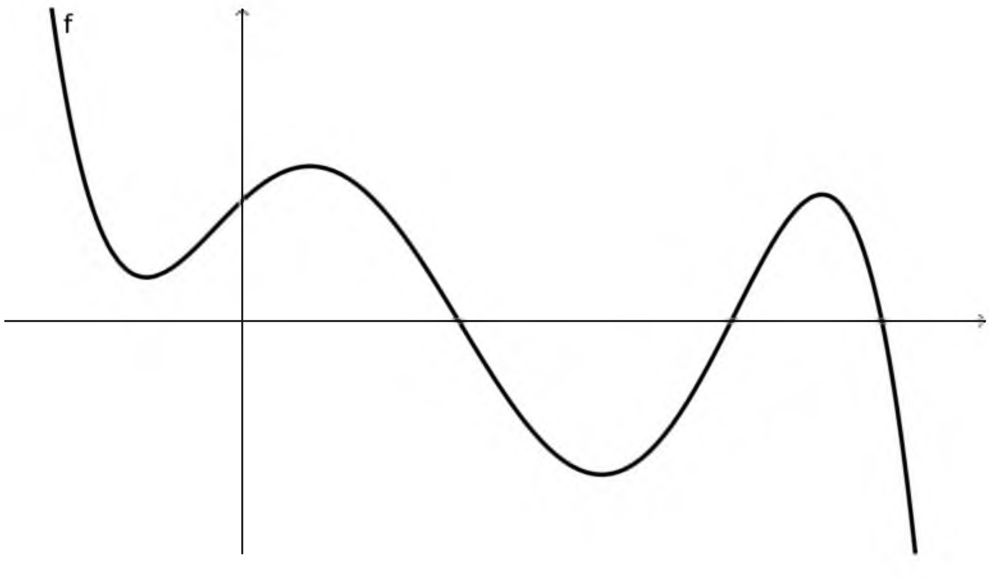
a) Dibujar con la mayor precisión posible el gráfico de la función derivada g'.



b) Dibujar con la mayor precisión posible el gráfico de la función derivada h'.



c) Realizá un gráfico aproximado de la función f'.



Unidad 4: Aplicaciones de la derivada

Análisis de funciones, estudio de problemas y optimización

Análisis de funciones

Problema 1 La recta tangente al gráfico de una cierta función f en $x = 0$ tiene ecuación $y = 5x - 2$.

a) ¿Cuánto vale $f'(0)$?

b) Si en $x = 3$ la recta tangente tiene ecuación $y = -2x + 3$, ¿cuánto vale $f(3)$?

c) ¿Cómo puede ser la fórmula de la función f?

Problema 2 Consideren la recta L de ecuación $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ y su punto $A = \left(2, \frac{3}{2}\right)$. Encuentren la ecuación de una función cuadrática f de modo tal que la recta L resulte tangente al gráfico de f en el punto A.

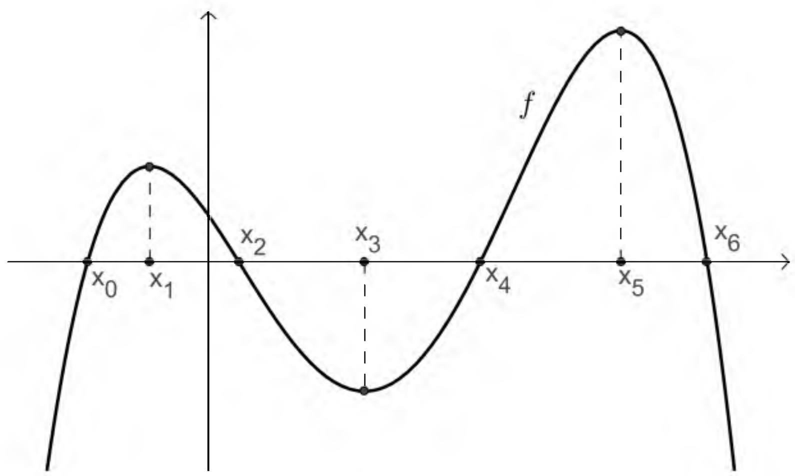
Problema 3 Para realizar observando el gráfico de la función f.

a) identificá un intervalo en el que se cumplan las siguientes dos condiciones:

$$f(x) \geq 0 \qquad \wedge \qquad f'(x) \leq 0$$

b) Identificá otro intervalo en el que se cumplan estas otras dos condiciones:

$$f(x) \leq 0 \qquad \wedge \qquad f'(x) \leq 0$$



Problema 4 Dibujá el gráfico de una función $g(x)$ que cumpla las condiciónes $g(x) \leq 0$ y $g'(x) \geq 0$ en el intervalo $(-1, 4)$ y que además tenga un mínimo local en $x = -1$.

Problema 5 Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad / \quad f(x) = -x^4 + 3x^2 - 6x + 4.$

a) Identificá el mayor intervalo para el cual:
   - $f(x) > 0$;
   - $f'(x) < 0$;
   - las ordenadas al origen de las rectas tangentes al gráfico de f en ese intervalo son positivas.

b) Elegí un punto del intervalo identificado en el ítem anterior, calculá **analíticamente** la recta tangente al gráfico de f en ese punto y corroborá que cumple con lo pedido en el ítem anterior.

Estudio de problemas

Problema 6 Una camioneta de reparto va de una ciudad hacia otra, sobre una ruta, para hacer una entrega. Luego de realizada la entrega, vuelve a la ciudad de origen. El gráfico que se encuentra en el archivo `recorrido_auto.ggb` representa la distancia de la camioneta a la ciudad de origen (medida en kilómetros) en función del tiempo transcurrido desde que salió a hacer el reparto (medido en horas).

a) Determiná aproximadamente:
   (i) a qué distancia se encuentra la ciudad de destino y cuánto tarda en llegar la camioneta;
   (ii) cuánto tarda en hacer la entrega;
   (iii) en qué momento del trayecto (el tiempo y la posición) la camioneta va a la mayor velocidad y cuál es esa velocidad.

b) Realizá un gráfico aproximado de la función que describe la velocidad de la camioneta en cada instante del trayecto.

Problema 7 Una pileta se está llenando con agua mediante una canilla. En un momento dado (que tomaremos como tiempo 0) se comienza a cerrar la canilla hasta que se llega a cerrar totalmente. La cantidad de agua que contiene la pileta (en litros) en función del tiempo (minutos) está dada por la función:

$$f : [0; t_1] \to \mathbb{R}/f(x) = x^3 - 30x^2 + 300x + 1500$$

a) ¿Cuál es el tiempo t_1 en el cual la canilla se cierra totalmente?

b) ¿Cuántos litros de agua tenía la pileta cuando se comenzó a cerrar la canilla?

c) ¿Cuántos litros de agua entraron a la pileta desde que se empezó a cerrar la canilla hasta que se terminó de cerrar?

d) ¿Cuál es la cantidad media (o promedio) de litros por minuto ($\frac{l}{m}$) que entraron a la pileta desde que se comenzó a cerrar la canilla hasta que se terminó de cerrar?

e) ¿Cuál es la cantidad media de $\frac{l}{m}$ que entraron a la pileta entre el minuto 3 y el minuto 5 después de que se empezó a cerrar la canilla?

f) ¿Cuál es la cantidad exacta de $\frac{l}{m}$ que estaban saliendo por la canilla a los cuatro minutos de haber empezado a cerrarla?

g) ¿Podrías definir una función que describa la cantidad de agua que salía por la canilla en cada momento entre que se empezó y se terminó de cerrar?

Problema 8 El depósito de descarga de un inodoro se llena desde que se aprieta el botón (aunque algunos todavía lo llamen *tirar la cadena*) hasta que el flotante detiene la carga y evita que se rebase. La fórmula de la función f calcula la cantidad de agua que hay en el depósito en ese intervalo de tiempo.

$$f : [0; t_1] \to \mathbb{R} / f(t) = \frac{1}{84}t^3 - \frac{5}{8}t^2 + 7t$$

La cantidad de agua del depósito esta medida en litros y el tiempo en segundos.

a) Si el deposito empieza a llenarse en $t = 0$ s. ¿Cuál es el tiempo t_1 que tarda en llenarse el deposito?

b) ¿Cuántos litros de agua contiene el deposito una vez lleno?

c) ¿Qué cantidad de litros por segundo entran en el depósito en el instante $t = 0$?

Problema 9 Un automóvil viaja por una ruta. La posición del auto sobre la ruta (medida en km) entre los momentos en que parte y en que llega a destino (medidos en minutos) está descripta por la función:

$$f : [0; t_1] \to \mathbb{R} \quad / \quad f(t) = -\frac{1}{7200}x^3 + \frac{1}{40}x^2 + 10$$

a) Sabiendo que el auto no se detiene en su trayecto hasta llegar a su destino, ¿cuál es el instante t_1 en que llega a su destino?

b) ¿Qué distancia recorrió el auto en su trayecto?

c) ¿Cuál fue la mayor velocidad a la que fue el auto? Expresarla en $\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Problema 10 Dos automóviles se mueven por una ruta según las siguientes funciones de posición, en donde la posición está expresada en kilómetros y el tiempo está expresado en horas.

- Automóvil A $\quad f : [0; t_A] \longrightarrow \mathbb{R} \quad / \quad f(x) = -x^5 + \frac{45}{4}x^4 - 40x^3 + 50x^2 + 40$
- Automóvil B $\quad g : [0; t_B] \longrightarrow \mathbb{R} \quad / \quad g(x) = -\frac{11}{6}x^3 + \frac{33}{2}x^2 + 5$

Se sabe que el auto A se detiene una vez durante su trayecto antes de finalizar su recorrido. Del auto B se sabe que solamente se detiene cuando finaliza su recorrido.

a) Calculá los instantes t_A y t_B.

b) ¿Existe algún momento en el que se cruzan los dos autos? ¿Cuál es su velocidad en ese momento?

c) ¿Existe algún instante en el que vayan a la misma velocidad? ¿Cuál es su velocidad en ese instante?

d) ¿Cuál de los dos autos fue a mayor velocidad? Justificá detalladamente tu decisión.

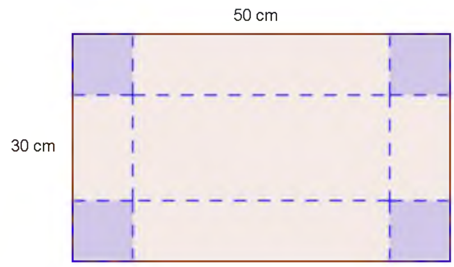
Optimización

Problema 11 Cortando cuadrados iguales de las esquinas de una plancha de cartón de $50\,\mathrm{cm} \times 30\,\mathrm{cm}$, el cartón puede plegarse para formar una caja.

a) ¿Cuál es el volumen de la caja que se puede armar si el lado de los cuadrados que se cortan mide 8 cm?

b) ¿Y si mide 12 cm?

c) ¿Cuál debe ser la medida del lado del cuadradito cortado para que el volumen de la caja que se arme sea lo mayor posible?



Problema 12 Se pretende fabricar una lata cilíndrica, con tapa, de 1 litro de capacidad. ¿Cuáles deben ser sus dimensiones para que se utilice el mínimo posible de metal?

Problema 13 Hallá las dimensiones que hacen mínimo el gasto de material de un envase con forma de paralelepípedo rectangular sabiendo que su volumen ha de ser $1\,\mathrm{dm}^3$ y que su ancho debe ser de $5\,\mathrm{cm}$.

Problema 14 Un agricultor dispone de $\$30000$ para cercar un terreno rectangular. Usando el río adyacente como uno de los lados, el recinto sólo necesita 3 cercas que lo delimiten. El costo de la cerca paralela al río es de $\$50$ por metro instalado, y el de la cerca para cada uno de los lados restantes es de $\$30$ por metro instalado. Calculá las dimensiones del terreno de área máxima que puede cercar con el presupuesto del que dispone.

Unidad 5: Integrales

Recorridos, llenados y áreas

Variaciones de cantidades

Problema 1 Una pileta se está llenando con agua mediante una canilla. En un momento dado (que tomaremos como tiempo 0) se comienza a cerrar la canilla hasta que se llega a cerrar totalmente. La cantidad de agua que contiene la pileta (en litros) en función del tiempo (minutos) está dada por la función:

$$f : [0; t_1] \to \mathbb{R} \qquad / \qquad f(t) = t^3 - 30t^2 + 300t + 1500$$

a) ¿Cuál es el tiempo t_1 en el cual la canilla se cierra totalmente?

b) ¿Cuántos litros de agua tenía la pileta cuando se comenzó a cerrar la canilla?

c) ¿Cuántos litros de agua entraron a la pileta desde que se empezó a cerrar la canilla hasta que se terminó de cerrar?

d) ¿Cuál es la cantidad media (o promedio) de litros por minuto ($\frac{\text{l}}{\text{m}}$) que entraron a la pileta desde que se comenzó a cerrar la canilla hasta que se terminó de cerrar?

e) ¿Cuál es la cantidad media de $\frac{\text{l}}{\text{m}}$ que entraron a la pileta entre el minuto 3 y el minuto 5 después de que se empezó a cerrar la canilla?

f) ¿Cuál es la cantidad exacta de $\frac{\text{l}}{\text{m}}$ que estaban saliendo por la canilla a los 4 minutos de haber empezado a cerrarla?

g) ¿Podrías definir una función que describa la cantidad de agua que salía por la canilla en cada momento entre que se empezó y se terminó de cerrar?

Problema 2 Ante la misma situación que el problema anterior, pero con otra pileta y otra canilla, sabemos que la función que describe la cantidad de agua que sale por la canilla desde que se comienza hasta que se termina de cerrar está dada por:

$$g : [0; t_1] \to \mathbb{R} \qquad / \qquad g(t) = 2t^2 - 116t + 882$$

a) ¿Cuál es el tiempo t_1 en el cual la canilla se cierra totalmente?

b) ¿Cuántos litros de agua entraron en la pileta durante el período en que se fue cerrando la canilla?

c) ¿Cuántos litros de agua entraron en la pileta durante los primeros 7 minutos en que se estaba cerrando la canilla?

d) ¿Podrías describir una fórmula que para cada instante t calcule la cantidad de agua que entró en la pileta desde que se comenzó a cerrar la canilla?

e) Si cuando se comenzó a cerrar la canilla la pileta contenía 1000 litros de agua, definan una fórmula que calcule la cantidad de agua que contenía la pileta en cada instante entre que se empezó y se terminó de cerrar la canilla.

f) ¿Cuántos litros de agua entraron a la pileta entre los minutos 5 y 7?

Problema 3 La cantidad de litros de agua por segundo que salen por la compuerta de una represa está representada por la función:

$$f : [0; t_0] \to \mathbb{R} \quad / \quad f(t) = \frac{1}{5}t^3 - 3t^2 + 100$$

a) El instante t_0 es el momento en el que no sale más agua por la compuerta. ¿Cuál es ese momento?

b) ¿Es verdad que a medida que transcurre el tiempo cada vez sale menos agua por la compuerta?

c) Calculá cuántos litros de agua salieron por la compuerta durante el tiempo para el cual está definida la función.

d) Si en el instante t_0 el embalse de la represa tiene 20000 litros de agua. ¿Cuántos litros tenía cuando comenzó a cerrarse la represa?

e) Escribí la fórmula de una función que calcule la cantidad de agua que había en el embalse para cada instante entre $t = 0$ y $t = t_0$.

Problema 4 La cantidad de litros de agua por segundo que entran al embalse de un río está representada por la función:

$$f : [0; 5] \to \mathbb{R} \quad / \quad f(t) = t^3 - 16t^2 + 77t + 60$$

a) ¿Es verdad que a medida que transcurre el tiempo cada vez entra más agua al embalse?

b) Calculá cuántos litros de agua entraron al embalse durante el tiempo para el cual está definida la función.

c) Si en el instante $t = 5$ el embalse de la represa tiene 30000 litros de agua. ¿Cuántos litros tenía en el instante $t = 0$?

d) Escribí la fórmula de una función que calcule la cantidad de agua que había en el embalse para cada instante entre $t = 0$ y $t = 5$.

Problema 5 Un automóvil está detenido en un semáforo. Cuando el semáforo cambia a luz verde se pone en marcha de tal modo que su velocidad está dada por la siguiente fórmula

$$v(t) = -\frac{1}{20}t^3 + \frac{1}{5}t^2 + 3t$$

donde t se mide en segundos y $v(t)$ en $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. El auto sólo se detiene en el siguiente semáforo.

a) Indicá cuántos minutos duró el trayecto realizado (de semáforo a semáforo)

b) Indicá en qué período de tiempo el conductor pisa el acelerador.

c) ¿Qué distancia recorre mientras acelera?

d) ¿Cuál fue la velocidad máxima alcanzada por el auto?

e) ¿Qué distancia separa ambos semáforos?

Cálculo de áreas

Problema 6 Calculá el área de la región bajo el gráfico de la función $f(x) = 2x + 1$ hasta el eje x entre:

- $x = 0$ y $x = 7$;
- $x = 0$ y $x = 19$;
- $x = 0$ y $x = x_0$.

¿Qué relación existe entre la fórmula de la función $A(x)$, que calcula el área bajo el gráfico de la función f entre 0 y x, y la fórmula de la función f?

Problema 7 Sea $g(x) = -x(x - 12)$, calculá el área bajo el gráfico de g entre:

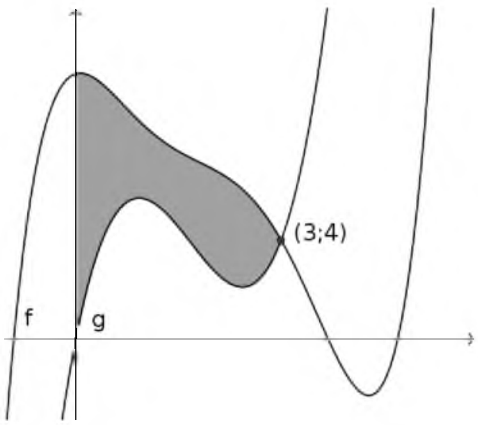
- $x = 0$ y $x = 12$;
- $x = 1$ y $x = 10$.

Problema 8

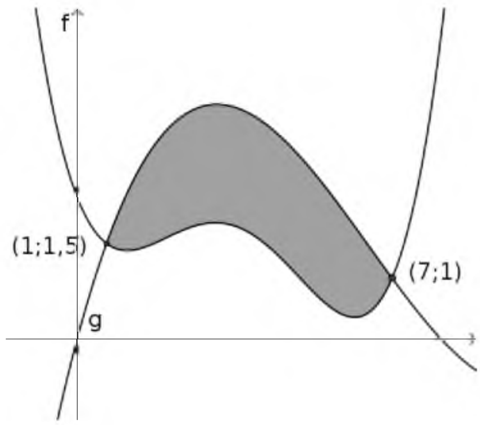
a) Calculá el área encerrada entre las funciones $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 6$ y $g(x) = x$.

b) Calculá el área encerrada entre las funciones $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 6$ y $g(x) = x - \frac{1}{4}$.

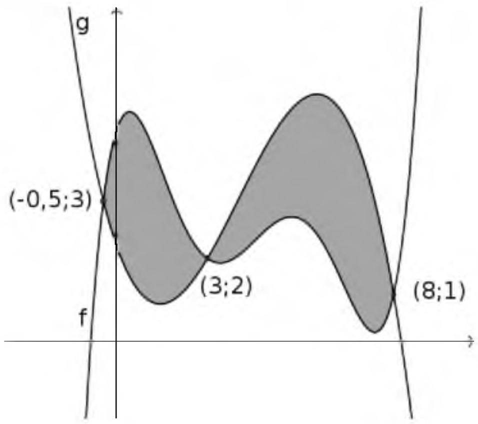
Problema 9 Establecé mediante integrales el área de las regiones sombreadas.

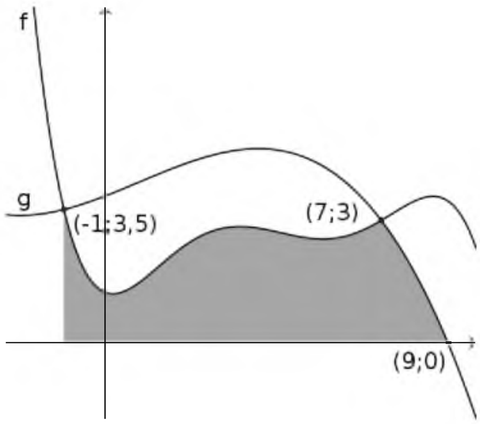


a)



b)

c) 

d) 

Problema 10 Calcular el área de la región encerrada por los graficos de las funciones.

a) $f(x) = x^2 + 1$; $g(x) = x + 3$

b) $f(x) = -x^2 + 1$; $g(x) = x + 1$

c) $f(x) = x^3 - x + 1$; $g(x) = \frac{1}{2}x + 1$

d) $f(x) = x^3 - x + 4$; $g(x) = -2x + 5$; el eje x

Problema 11 Siendo

- $f(x) = -x^2 + 9$
- $g(x) = x^2 + 1$

El área encerrada por los gráficos de las funciones f y g es:

□ $\int_{-5}^{5} -x^2 + 9 \, dx - \int_{-5}^{5} x^2 + 1 \, dx$

□ $\int_{-2}^{2} -x^2 + 9 \, dx - \int_{-2}^{2} x^2 + 1 \, dx$

□ $\int_{-2}^{2} x^2 + 1 \, dx - \int_{-2}^{2} -x^2 + 9 \, dx$

□ $\int_{-5}^{5} -x^2 + 9 \, dx - \int_{-2}^{2} x^2 + 1 \, dx$

Problema 12 Si la región encerrada por el gráfico de $f(x) = -2x^2 + 10x + 12$ y el eje x queda dividida por la recta $x = a$ en dos regiones de igual área, entonces el valor de a es:

□ 0 □ 6 □ 2,5 □ 12

Problema 13 Dada la función $f(x) = x^2 - 2x + 1$:

a) Calculá la ecuación de la recta L que es tangente al gráfico de f en $x_0 = 2$.

b) Calculá el área encerrada entre el gráfico de f, la recta L y el gráfico de g, siendo $g(x) = -x + 13$.

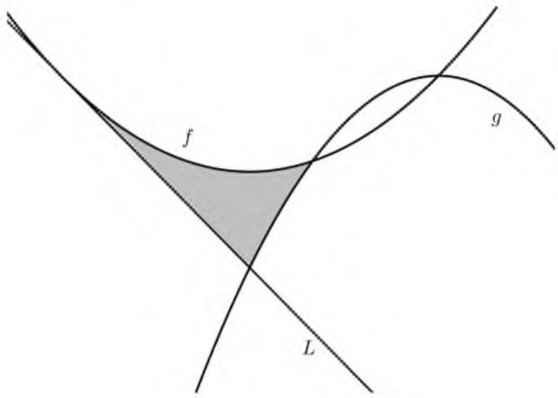
Problema 14 Dada la función $f(x) = -3x^2 + 4x + 5$:

a) Calculá la ecuación de la recta L que es tangente al gráfico de f en $x_0 = 1$.

b) Calculá el área encerrada entre el gráfico de f, la recta L y el gráfico de g, siendo $g(x) = x - 1$.

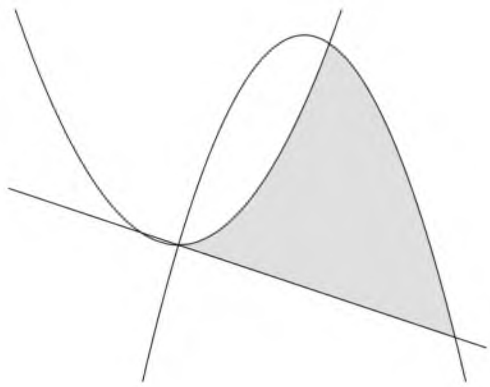
Problema 15 Calculá el área sombreada sabiendo que:

- $f(x) = x^2 + 4x + 6$.
- $g(x) = -2x^2 - 4x + 1$.
- La recta L es tangente al gráfico de f en el punto $(-3; f(-3))$.



Problema 16 Calculá el área sombreada sabiendo que:

- $g(x) = -\frac{1}{3}x + 1$.
- $h(x) = -x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{11}{3}$.
- f es una función cuadrática que pasa por los puntos $(0; 2)$ y $(1; 4)$, y su vértice pertenece a los gráficos de g y de h.



Unidad 6: Integración de ecuaciones diferenciales

Integrales indefinidas, diferenciales y cálculo de variación

Integrales indefinidas

Problema 1 Hallá la expresión integrada de la fórmula de las siguientes familias de funciones.

a) $y = \int 2x^2 + x - 2 \, \mathrm{d}x$

b) $x = \int -3t^4 + t^2 - t \, \mathrm{d}t$

c) $u = \int -\frac{1}{2}e^t \, \mathrm{d}t$

d) $w = \int \frac{1}{y} \, \mathrm{d}y$

e) $x = \int \frac{7}{t} \, \mathrm{d}t$

f) $x = \int -\frac{1}{t^2} \, \mathrm{d}t$

g) $y = \int -\frac{1}{3}\operatorname{sen}(t) \, \mathrm{d}t$

Problema 2 Hallá la expresión integrada de la fórmula de las siguientes familias de funciones.

a) $p = \int \frac{18x^2 + 54}{3x^3 + 27x + 3} \, \mathrm{d}x$

b) $p' = \frac{18x^2 + 54}{3x^3 + 27x + 3}$

c) $q = \int \operatorname{sen}(t) \cdot e^{\cos(t)} \, \mathrm{d}t$

d) $r = \int (2x + 3) \cdot \cos(x^2 + 3x - 1) \, \mathrm{d}x$

e) $y' = \operatorname{sen}(p) \cdot \cos(p)$

f) $z' = \frac{\ln(x)}{x}$

g) $a = \int \ln(\cos(t)) \cdot \frac{\operatorname{sen}(t)}{\cos(t)} \, \mathrm{d}t$

h) $g' = \sqrt[3]{x^2 + 2x + 1} \cdot (10x + 10)$

Integrales definidas

Problema 3 Una pileta se está llenando con agua mediante una canilla. En un momento dado (que tomaremos como tiempo 0) se comienza a cerrar la canilla hasta que se llega a cerrar totalmente. La función que describe la cantidad de agua que sale por la canilla desde que se comienza hasta que se termina de cerrar está dada por:

$$g : [0; 9] \to \mathbb{R} \quad / \quad g(t) = 2t^2 - 116t + 882$$

a) Hallá la forma integral y la forma integrada de la fórmula de una función a que calcule para cada instante t la cantidad de agua que entró en la pileta desde que se comenzó a cerrar la canilla, sabiendo que en ese momento la pileta contenía 1000 litros de agua?

b) Utilizá la forma integrada para resolver.

   (i) ¿Cuántos litros de agua entraron en la pileta durante el período en que se fue cerrando la canilla?

   (ii) ¿Cuántos litros de agua entraron en la pileta durante los primeros 7 minutos en que se estaba cerrando la canilla?

   (iii) ¿Cuántos litros de agua entraron a la pileta entre los minutos 5 y 7?

Problema 4 La cantidad de litros de agua por segundo que salen por la compuerta de una represa está representada por la función:

$$f : [0; 10] \to \mathbb{R} \quad / \quad f(t) = \frac{1}{5}t^3 - 3t^2 + 100$$

a) Sabiendo que en el instante $t = 10$ el embalse de la represa tiene 20000 litros de agua, definí una función y que calcule la cantidad de agua que había en el embalse para cada instante entre $t = 0$ y $t = 10$. Expresá su fórmula en forma integral y en forma integrada.

b) Utilizá la forma integrada para resolver.

   (i) Calculá cuántos litros de agua salieron por la compuerta durante el tiempo para el cual está definida la función.

   (ii) ¿Cuántos litros tenía cuando comenzó a cerrarse la represa?

Problema 5 La cantidad de litros de agua por segundo que entran al embalse de un río está representada por la función:

$$f : [0; 5] \to \mathbb{R} \quad / \quad f(t) = t^3 - 16t^2 + 77t + 60$$

a) Sabiendo que en el instante $t = 5$ el embalse de la represa tiene 30000 litros de agua, definí una función z que calcule la cantidad de agua que había en el embalse para cada instante entre $t = 0$ y $t = 5$. Expresá su fórmula en forma integral y en forma integrada.

b) Utilizá la forma integrada para resolver.

   (i) Calculá cuántos litros de agua entraron al embalse durante el tiempo para el cual está definida la función.

   (ii) ¿Cuántos litros tenía el embalse en el instante $t = 0$?

Problema 6 Un automóvil está detenido en un semáforo. Cuando el semáforo cambia a luz verde se pone en marcha de tal modo que su velocidad está dada por la siguiente fórmula

$$v(t) = -\frac{1}{20}t^3 + \frac{1}{5}t^2 + 3t$$

donde t se mide en segundos y $v(t)$ en $\frac{\text{m}}{\text{s}}$. El auto sólo se detiene en el siguiente semáforo.

a) Indicá cuántos minutos duró el trayecto realizado (de semáforo a semáforo)

b) Indicá en qué período de tiempo el conductor pisa el acelerador.

c) Tomando la posición del primer semáforo como $p_0 = 70\text{m}$, definí una función p que calcule la posición del auto para cada instante del recorrido entre semáforos. Expresá su fórmula en forma integral y en forma integrada.

d) Utilizá la forma integrada para resolver.
   (i) ¿Qué distancia recorre mientras acelera?
   (ii) ¿Qué distancia separa ambos semáforos?

Ecuaciones diferenciales

Problema 7 Hallá la expresión integrada de la fórmula de las siguientes familias de funciones.

a) $y' = 5$

b) $y' = 3y$

c) $y' = 7y^2$

d) $y' = -2y^3$

Problema 8 Hallá la expresión integrada de la fórmula de las siguientes familias de funciones.

a) $y' = k$

b) $y' = ky$

c) $y' = ky^2$

d) $y' = ky^3$

Ley de enfriamiento/calentamiento de Newton

De acuerdo con la ley empírica de Newton de enfriamiento/calentamiento, la rapidez con la que cambia la temperatura de un cuerpo es proporcional a la diferencia entre la temperatura del cuerpo y la del medio que lo rodea, que se llama temperatura ambiente. Si $T(t)$ representa la temperatura del cuerpo al tiempo t, T_m es la temperatura del medio que lo rodea y T' es la rapidez con que cambia la temperatura del cuerpo, entonces la ley de Newton de enfriamiento/calentamiento traducida en una expresión matemática es

$$\frac{dT}{dt} \propto T - T_m \qquad \text{ó} \qquad \frac{dT}{dt} = k(T - T_m)$$

donde k es una constante de proporcionalidad. En ambos casos, enfriamiento o calentamiento, si T_m es una constante, se establece que $k < 0$.

Problema 9 En un experimento se calentó un líquido hasta alcanzar una temperatura de 95 °C. Inmediatamente después se lo dejó enfriar al aire libre a una temperatura ambiente de 20 °C. Suponiendo que el líquido se enfría según la Ley de enfriamiento de Newton con una constante de proporcionalidad $k = -0{,}2$:

a) Escribí una fórmula que calcule la temperatura del líquido en cada instante t (medido en minutos).
b) ¿Cuál era la temperatura del líquido luego de transcurridos 6 minutos desde que comenzó a enfriarse?
c) ¿A partir de qué momento su temperatura se va a encontrar por debajo de los 25 °C?

Problema 10 En un experimento se calentó un líquido hasta alcanzar una temperatura de 85 °C. Inmediatamente después se lo dejó enfriar al aire libre a una temperatura ambiente de 15 °C. Suponiendo que el líquido se enfría según la Ley de enfriamiento de Newton con una constante de proporcionalidad $k = -0{,}15$:

a) Escribí una fórmula que calcule la temperatura del líquido en cada instante t (medido en minutos).
b) ¿Cuál era la temperatura del líquido luego de transcurridos 4 minutos desde que comenzó a enfriarse?
c) ¿A partir de qué momento su temperatura se va a encontrar por debajo de los 20 °C?

Problema 11 Se sacó una botella con agua de una heladera que estaba a 5 °C y se la dejó a una temperatura ambiente de 23 °C. Suponiendo que la temperatura del líquido varía según la Ley de calentamiento de Newton con una constante de proporcionalidad $k = -0{,}35$:

a) Escribí una fórmula que calcule la temperatura del agua en cada instante t (medido en minutos).
b) ¿Cuál era la temperatura del agua luego de transcurridos 4 minutos desde que se sacó de la heladera?
c) ¿A partir de qué momento su temperatura se va a encontrar por encima de los 15 °C?

Dinámica poblacional

Uno de los primeros intentos para modelar el crecimiento de la población humana por medio de las matemáticas fue realizado en 1798 por el economista inglés Thomas Malthus. Básicamente la idea detrás del modelo de Malthus es la suposición de que la razón con la que la población de un país varía en un cierto tiempo es proporcional a la población total del país en ese tiempo. En otras palabras, entre más personas estén presentes al tiempo t, habrá más en el futuro. En términos matemáticos, si $P(t)$ denota la población al tiempo t, entonces esta suposición se puede expresar como

$$\frac{dP}{dt} \propto P \qquad \text{ó} \qquad \frac{dP}{dt} = kP$$

donde k es una constante de proporcionalidad. Este modelo simple, falla si se consideran muchos otros factores que pueden influir en el crecimiento o decrecimiento (por ejemplo, inmigración y emigración), resultó, sin embargo, bastante exacto en predecir la población de los Estados Unidos, durante 1790-1860. Las poblaciones que crecen con una razón descrita son raras; sin embargo, aún se usa para modelar el crecimiento de pequeñas poblaciones en intervalos de tiempo cortos (por ejemplo, crecimiento de bacterias en una caja de Petri).

Problema 12 Hallá la fórmula de una función que calcule la cantidad de bacterias de una población para un cierto tiempo t suponiendo la Dinámica poblacional descrita, una población incial de 8000 individuos y una constante de proporcionalidad $k = 0,4$.

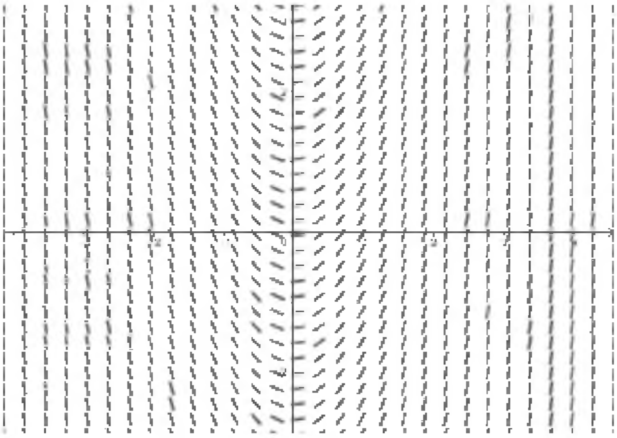
Utilizá la fórmula hallada para calcular el tiempo que tardará en duplicarse el número de individuos.

Problema 13 La cantidad de individuos de una población varía según la Dinámica descrita. Además de crecer de manera proporcional con respecto a la cantidad de individuos, también decrece de manera proporcional a la población. Suponiendo una población inicial de 10000 individuos, una constante de proporcionalidad de $0,4$ para los nacimientos y una constante de proporcionalidad de $0,25$ para las muertes, hallá la fórmula de una función que calcule la cantidad de individuos de la población para cada instante t.

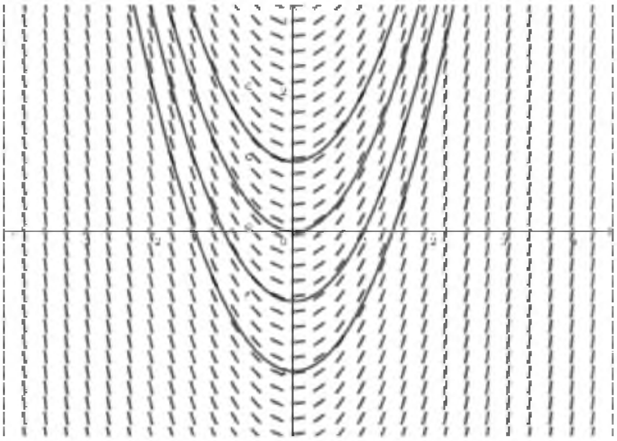
Utilizá la fórmula hallada para calcular el tiempo que tardará en duplicarse el número de individuos.

Problema 14 La siguiente figura muestra el campo direccional de la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = 2x$

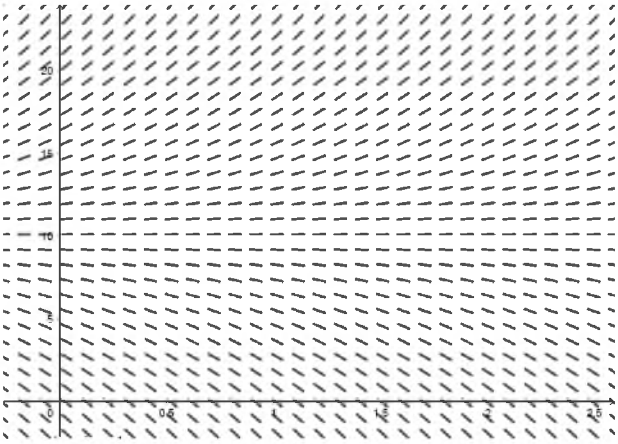
a) ¿Qué observan con respecto a campo direccional?



b) Comparen las curvas solución trazadas sobre la siguiente figura con la fórmula $y = x^2 + C$ para la soluciones de esta ecuación diferencial.



Problema 15 La siguiente figura es un campo direccional para $\frac{dy}{dx} = y - 10$



a) Dibujen la curva solución para cada una de las siguientes condiciones iniciales:

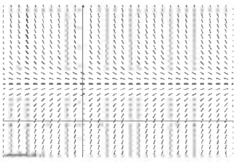
(i) $y = 8$ cuando $x = 0$

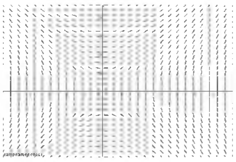
(ii) $y = 12$ cuando $x = 0$

(iii) $y = 10$ cuando $x = 0$

b) Como $\frac{dy}{dx} = y - 10$, cuando $y = 10$, tenemos $\frac{dy}{dx} = 10 - 10 = 0$. Expliquen por qué esto se relaciona con la respuesta del inciso (iii).

Problema 16 Las siguientes figuras muestran los campos direccionales para $\frac{dy}{dx} = 2 - y$ y $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$





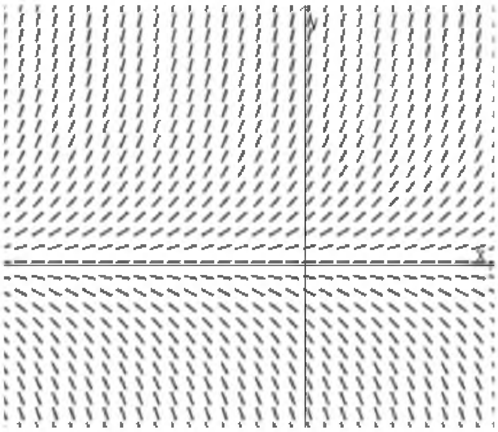
a) ¿Cuál campo direccional corresponde a cada ecuación diferencial?

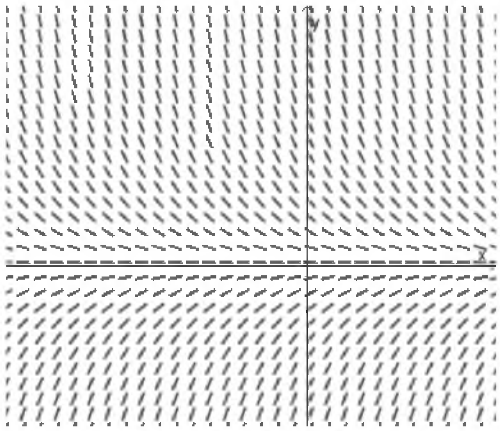
b) Tracen curvas solución para cada campo direccional con las condiciones iniciales:

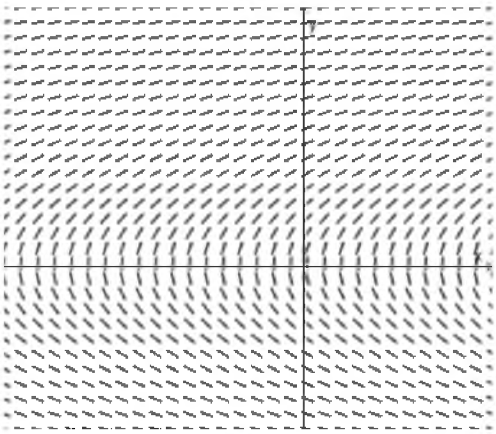
- $y = 1$ cuando $x = 0$
- $y = 3$ cuando $x = 0$
- $y = 0$ cuando $x = 0$

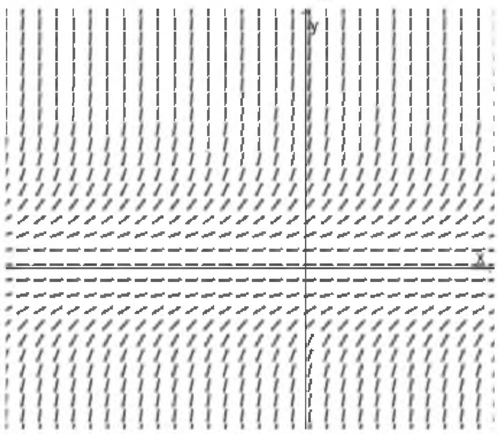
c) Para cada curva solución, ¿qué pueden decir acerca del comportamiento de y a largo plazo (para valores grandes de x)? En particular, a medida que $x \to \infty$, ¿qué le ocurre al valor de y?

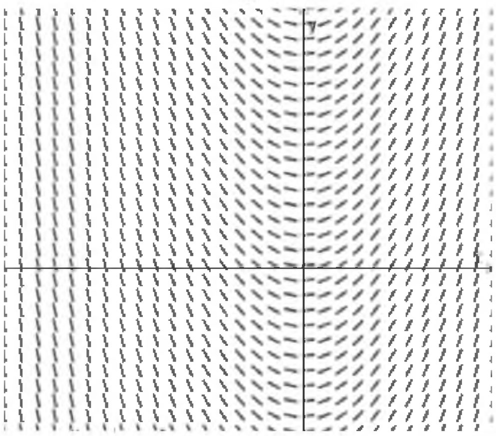
Problema 17 Relacionen los campos direccionales de las siguientes figuras con sus correspondientes ecuaciones diferenciales.

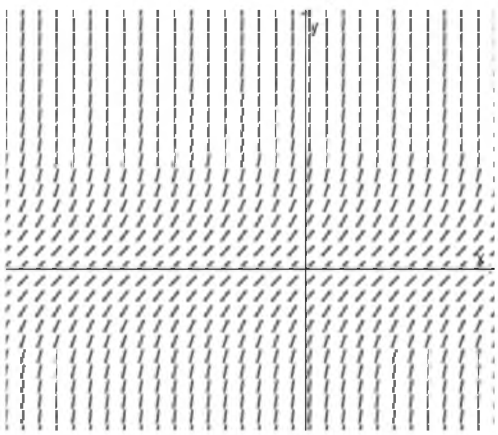

1

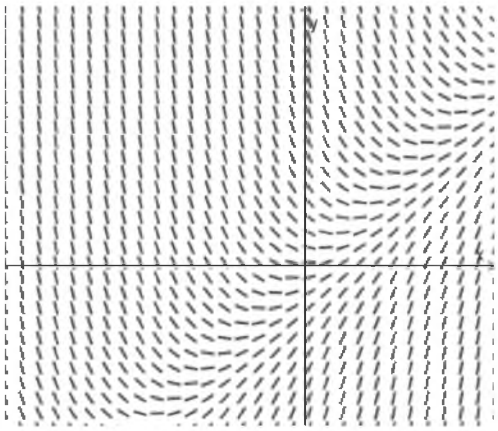

2


3

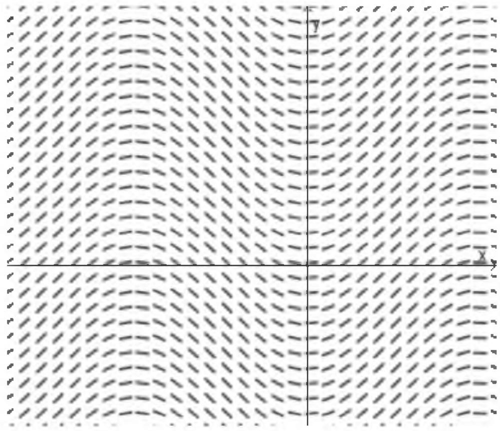

4


5

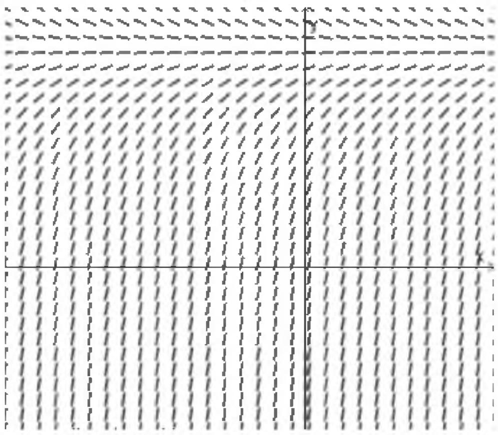

6



7



8



9

$y' = -y$

$y' = y$

$y' = x$

$y' = 1/y$

$y' = y^2$

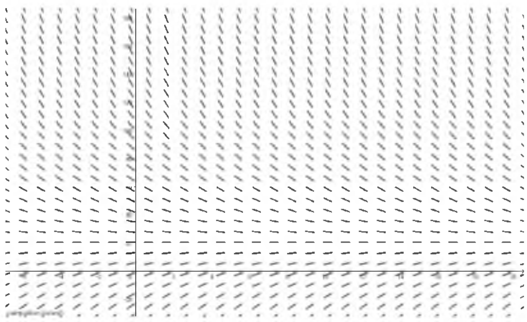
$y' = senx$

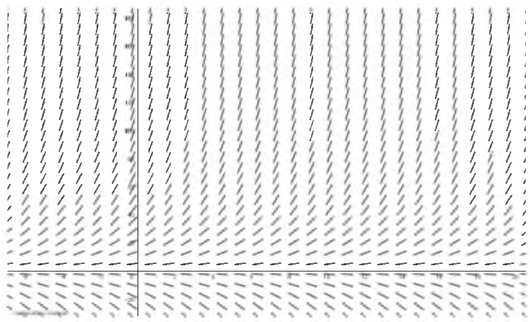
$y' = x - y$

$y' = 4 - y$

$y' = 1 + y^2$

Problema 18 A continuación se muestran los campos direccionales de las ecuaciones diferenciales estudiadas en los problemas **Problema 10** y **Problema 12**. Analicen qué gráfico se corresponde con cada problema y expliquen por qué.





Ecuaciones diferenciales de segundo orden

Problema 19 Cuando un cuerpo se mueve bajo la acción de la gravedad sabemos que: $\frac{d^2s}{dt^2} = -g$, donde s es la altura del cuerpo sobre el suelo en el tiempo t y g es la aceleración debida a la gravedad. Al resolver esta ecuación, primero se integra para obtener la velocidad $v = \frac{ds}{dt}$:

$$\frac{ds}{dt} = -g \cdot t + v_0$$

donde v_0 es la velocidad inicial.

Al integrar de nuevo se obtiene: $s = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + s_0$ donde s_0 es la altura inicial.

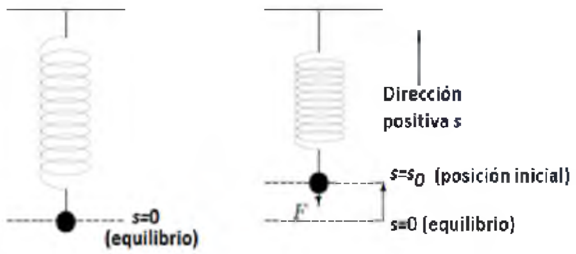
La ecuación diferencial $\frac{d^2s}{dt^2} = -g$ recibe el nombre de ecuación diferencial de segundo orden porque la ecuación contiene una segunda derivada pero no derivadas superiores. La solución general a una ecuación diferencial de segundo orden es una familia de funciones con dos parámetros, aquí v_0 y s_0. Encontrar valores para las dos constantes corresponde a seleccionar una función particular de esta familia.

Supongamos que un cuerpo en la Tierra se mueve bajo una gravedad de $g = 9,8 \frac{m}{s^2}$.

a) Encuentren la solución de la ecuación diferencial $\frac{d^2s}{dt^2} = -g$ sabiendo que $v_0 = 8\frac{m}{s}$. Hallen la distancia que recorrió el cuerpo al cabo de $0,5$ segundos si fue lanzado desde 3 m.

b) Encuentren la solución de la ecuación diferencial $\frac{d^2s}{dt^2} = -g$ sabiendo que $s_0 = 3$ m y la velocidad inicial es $v_0 = 10\frac{m}{s}$.
   - ¿Qué distancia recorrió el cuerpo en el intervalo $(0; 1)$?
   - ¿Pueden anticipar, sin rehacer las cuentas, cuánto cambia la distancia recorrida en el mismo intervalo de tiempo si se duplica la velocidad inicial?

Problema 20 No todas las ecuaciones diferenciales de segundo orden se pueden resolver simplemente integrando dos veces. Consideren una masa m unida al extremo de un resorte que cuelga del techo. Suponemos que la masa del resorte en sí es insignificante en comparación con la masa m.



Cuando el sistema no se altera, ninguna fuerza neta actúa sobre la masa. La fuerza de la gravedad es balanceada por la fuerza que ejerce el resorte sobre la masa, y el resorte está en posición de equilibrio. Si tiramos de la masa, sentimos una fuerza que tira hacia arriba. Si, en cambio, empujamos hacia arriba la masa, sucede lo contrario: una fuerza empuja la masa hacia abajo. ¿Qué sucede si empujamos la masa hacia arriba y luego la liberamos? Esperamos que la masa oscile hacia arriba y hacia abajo alrededor de la posición de equilibrio. Para entender cómo se mueve la masa, necesitamos saber la relación exacta entre su desplazamiento s desde la posición de equilibrio y la fuerza neta F ejercida sobre la masa. Esperamos que cuanto más lejos esté la masa de la posición de equilibrio, y cuanto más el resorte se estire o se comprima, mayor será la fuerza. De hecho, siempre que el desplazamiento no es lo suficientemente grande como para deformar el resorte de forma permanente, los experimentos muestran que la fuerza neta F es aproximadamente proporcional al desplazamiento s:

$$F = -k \cdot s$$

donde k es una constante positiva y el signo menos significa que la fuerza neta está en la dirección opuesta al desplazamiento. El valor de k depende de las propiedades físicas de un resorte en particular. Esta relación se conoce como Ley de Hooke. Supongamos que empujamos la masa hacia arriba cierta distancia y luego la liberamos. Después de soltar, la fuerza neta hace que la masa se acelere hacia la posición de equilibrio. Por la Segunda Ley del Movimiento de Newton, tenemos que $F = m \cdot a$, donde m es la masa y a, la aceleración. Siendo la aceleración igual a:

$$a = \frac{d^2s}{dt^2}$$

y la fuerza es $F = -k \cdot s$, resulta $-k \cdot s = m\frac{d^2s}{dt^2}$, que es equivalente a la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -\frac{k}{m}s$$

Por lo tanto, el movimiento de la masa se describe mediante una ecuación diferencial de segundo orden. Como la masa oscila, la solución a la ecuación diferencial $\frac{d^2s}{dt^2} = -s$ involucra funciones trigonométricas (ya que se trata de un movimiento periódico):

$$s(t) = C_1cos(t) + C_2sen(t)$$

Si la masa de un resorte se desplaza una distancia de s_0 y luego se la libera, encuentren la solución de la ecuación diferencial $\frac{d^2s}{dt^2} = -s$.

Problema 21 Comprueben que cada función es solución de la ecuación diferencial dada:

- $y = 2\cos(t) + 3\sin(t)$ es solución de $y'' + y = 0$
- $y = 3\sin(2t) + 2\cos(2t)$ es solución de $y'' + 4y = 0$

Problema 22 Verifiquen que la función $y = A\cos(t) + B\sin(t)$ es solución de la ecuación diferencial $y'' + y = 0$ para todos los números reales A y B.

Problema 23 Verifiquen que la función $y = A\sin(2t) + B\cos(2t)$ es solución de la ecuación diferencial $y'' + 4y = 0$ para todos los números reales A y B.

Parte III

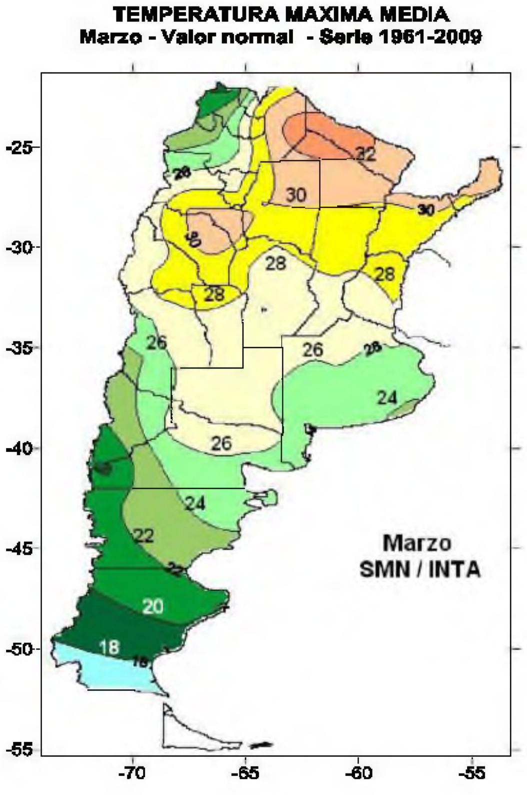
Funciones de varias variables

Unidad 7: Funciones de dos variables

Tablas, variaciones y gráficos

Interpretación y producción de modelos

Problema 1 La siguiente figura muestra un mapa meteorológico tomado del Servicio metereológico Nacional. El mapa ilustra la temperatura máxima promedio del mes de marzo, en grados (°C), en Argentina entre 1961 y 2009. Las curvas del mapa, llamadas isotermas, dividen al país en zonas según si la temperatura promedio fue de 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30 ó 32 grados. (Isós quiere decir igual, y therme, calor). Observá que la isoterma que separa las zonas de 20 y 22 grados, por ejemplo, enlaza todos los puntos donde la temperatura es exactamente de 22 °C. Los números que aparecen sobre los ejes son los los meridianos y paralelos.

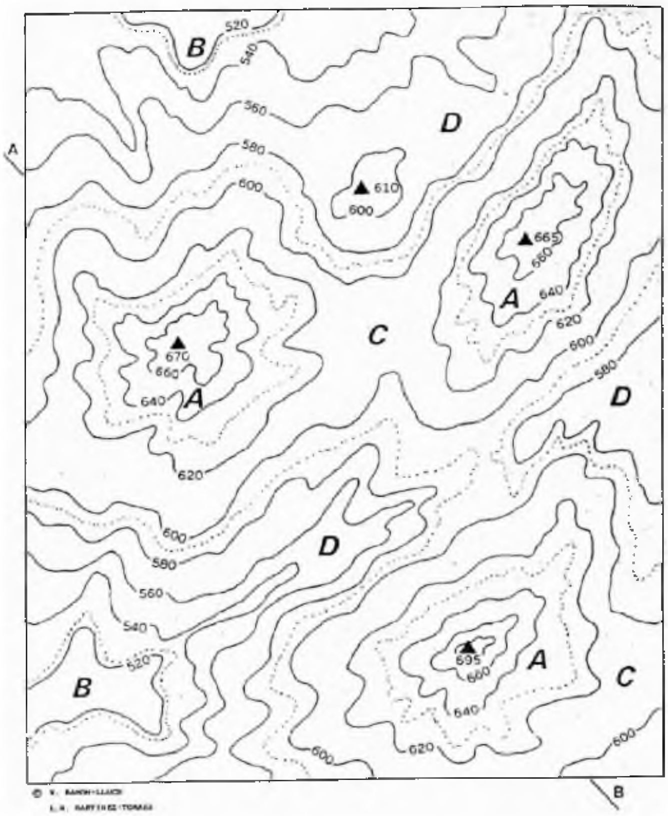


a) Calculá el valor promedio de temperatura máxima del mes de marzo en Moreno, Ushuaia; Posadas, San Salvador de Jujuy, y Mar del Plata.

b) ¿Cuál fue la temperatura máxima promedio en el punto $(-60; -35)$?

c) Determiná un punto en el mapa donde la temperatura máxima promedio fue de 20 °C.

Problema 2 Uno de los ejemplos más comunes de un diagrama de contorno es un *mapa topográfico* como el que se ilustra en la siguiente figura.



Este mapa indica la elevación de la región y es una buena manara de tener una vista general del terreno. En qué lugar están las montañas, dónde los terrenos planos. Las curvas de un mapa topográfico, que separan elevaciones menores de las más altas, se denominan *líneas de contorno* porque describen el contorno o forma del terreno. Debido a que cada punto situado a lo largo de un mismo contorno tiene la misma elevación, las líneas de contorno también se denominan *curvas de nivel* o *conjuntos de nivel*.

a) ¿Es cierto que si dos líneas de contorno están cerca quiere decir que el terreno en esa zona es más abrupto?

b) ¿Se pueden cruzar dos curvas de nivel?¿Por qué?

c) Trazá sobre el gráfico una curva que describa una trayectoria sobre la cual el terreno se eleve lo más rápidamente posible.

d) ¿Es cierto que los diagramas de contorno y las gráficas son dos maneras de representar una función de dos variables?

Problema 3 Supongamos que un carnicero quiere saber cuánta carne comprará la gente. Esto depende, en parte, de cuánto dinero tienen las personas y del precio de la carne.

El consumo de carne, C (en kilos por familia, por semana), es una función que depende del ingreso familiar, I (en miles de pesos por año), y del precio de la carne, p (en pesos por kilo). En notación de función se escribe: $C = f(I; p)$.

La siguiente tabla contiene información de una posible función de este estilo. Los valores de p se muestran horizontalmente en la parte superior de la tabla, los valores de I verticalmente en el lado izquierdo, y los valores correspondientes de $f(I; p)$ se indican en la tabla.

		Precio de la carne ($/kg)			
		60	**80**	**100**	**120**
Ingreso familiar por año (en miles de pesos)	**50**	2,65	2,59	2,51	2,43
	100	4,14	4,05	3,94	3,88
	150	5,11	5,00	4,97	4,84
	200	5,35	5,29	5,19	5,07
	250	5,79	5,77	5,60	5,53

a) ¿Cómo varía el consumo de carne en función del ingreso familiar, si el precio de la carne se mantiene constante?

b) ¿Cómo varía el consumo de carne en función del precio de la carne, si el ingreso familiar se mantiene constante?

c) Decidí si los resultados de los límites son posibles para esta situación y explicá por qué.

- $\lim\limits_{\substack{p=p_0 \\ I\to+\infty}} f(I;p) = +\infty$
- $\lim\limits_{\substack{I=I_0 \\ p\to+\infty}} f(I;p) = 0$

Problema 4 Hallá una fórmula para la función $M = f(b, t)$, donde M es la cantidad de dinero de una cuenta bancaria t años después de una inversión inicial de b dólares, suponiendo que el interés se acumula a razón del 5 % con capitalización anual.

a) ¿Cómo varía el monto acumulado para una inversión inicial determinada?

b) ¿Cómo varía el monto acumulado en función de la inversión inicial si se considera una cantidad de años fija?

Problema 5 Se sabe que un determinado auto consume un litro de nafta por cada 14 kilómetros recorridos. Definí una función que calcule el costo en combustible de un viaje realizado con ese auto en función de la distancia recorrida y del precio de la nafta.

a) Si la distancia recorrida por el auto es constante, ¿cómo varía el costo del viaje?

b) ¿Y si se considera constante el precio de la nafta?

Problema 6 El número, n, de nuevos automóviles vendidos en un año es una función del precio de los automóviles nuevos, c, y del precio promedio de la nafta, g.

a) Si c se mantiene constante, ¿n es una función creciente o decreciente de g?

b) Si g se mantiene constante, ¿n es una función creciente o decreciente de c?

c) ¿En cuál de los dos casos la tasa de variación es mayor?

Problema 7 Cuando se inyecta un medicamento en el tejido muscular, aquél se difunde en el torrente sanguíneo. La concentración del medicamento en la sangre aumenta hasta alcanzar un máximo y después disminuye. La concentración, C (en miligramos por litro), del medicamento en la sangre es una función de dos variables: x, la cantidad (en mg) del medicamento proporcionado por la inyección y t, el tiempo (en horas) desde que se aplicó la inyección. Se sabe que

$$C : [1; 4] \times [0; +\infty) \longrightarrow \mathbb{R} \qquad \text{tal que} \qquad C = f(x, t) = te^{-t(5-x)}$$

a) En los términos del problema, realizá interpretaciones de las secciones transversales:
   - $f(4; t)$
   - $f(x; 1)$
b) Calculá en qué momento se dio la mayor concentración en sangre si la inyección fue de $1{,}5\ \mathrm{mg}$.
c) Trazá los gráficos de las secciones transversales de $f(a; t)$ para $a = 1, 2, 3, 4$ en un mismo sistema de coordenadas (podés utilizar un deslizador en GeoGebra). ¿En qué momento se da la mayor concentración en sangre?
d) Hallá la fórmula de una función que describa la velocidad con la que varía la concentración (en función del tiempo) para cada valor posible a de la inyección.
e) Hallá una fórmula que calcule el instante en que se da la mayor concentración para cada valor posible a de la inyección.

Problema 8 Se propone investigar la forma en que la demanda de café depende del precio del café y del precio del té. Se supone que la demanda de café Q (en miles de quilos por semana) depende del precio del café c y del precio del té t, ambos en dólares por kilo de acuerdo con la fórmula:

$$Q : (0; 6] \times (0; 6] \longrightarrow \mathbb{R} \qquad \text{tal que} \qquad Q = f(c; t) = 100\frac{t}{c}$$

a) Hacé una tabla que muestre el valor de Q para valores enteros de c y t. Es decir, para $c = 1; 2; 3; 4; 5; 6$ y $t = 1; 2; 3; 4; 5; 6$.
b) Realizá los gráficos de las curvas de demanda $f(c; t_0)$ con $t_0 = 1; 2; 3; 4; 5; 6$ y relacionalos con los valores de la tabla.
   ¿Cómo cambia la curva de demanda de café a medida que el precio del té aumenta? Explicalo en términos de la demanda de café por qué esto es razonable.
c) ¿Es Q una función creciente o decreciente de c? ¿Es Q una función creciente o decreciente de t? Justificá tu respuesta analizando las derivadas parciales y explicá en términos de la demanda de café por qué esto es así.

Parte IV

Apéndice

Sobre derivadas

Tabla de derivadas

$f(x)$	$f'(x)$
$k \qquad (k \in \mathbb{R})$	0
$a \cdot x \qquad (a \in \mathbb{R})$	a
x^2	$2x$
x^n	$n \cdot x^{n-1}$
e^x	e^x
$a^x \qquad (a \in \mathbb{R}, a > 0)$	$\ln(a) \cdot a^x$
$\ln(x) \qquad (x > 0)$	$\frac{1}{x}$
$\operatorname{sen}(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\operatorname{sen}(x)$

Reglas de derivación

Sean f y g funciones derivables.

- $[a \cdot f(x)]' = a \cdot f'(x)$
- $[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$
- $[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
- $\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]' = \dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$ con $g(x) \neq 0$.
- Regla de la cadena: $[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Bibliografía

[1] Altman, Silvia; Comparatore, Claudia; Kurzrok, Liliana, *Análisis 1*, Editorial Longseller, Buenos Aires, 2008.

[2] Altman, Silvia; Comparatore, Claudia; Kurzrok, Liliana, *Análisis 2*, Editorial Longseller, Buenos Aires, 2008.

[3] Apostol, Tom M., *Calculus Vol. 1*, Reverté, 1999.

[4] Demidovich, Boris, *Problemas y ejercicios de análisis*, Paraninfo, 2000.

[5] Hughes-Hallett, Deborah, Gleason, Andrew M., et al., *Cálculo aplicado*, CECSA, 1999.

[6] Noriega, Ricardo, *Cálculo Diferencial e Integral*, Editorial Docencia, 2013.

[7] Sadosky, Manuel; Guber, Rebeca, *Elementos de cálculo diferencial e integral*, Alsina, 2010.

[8] Spivak, Michael, *Calculus*, Reverté, 2003.

[9] Stewart, James, *Calculo de una variable*, Cengage Learning/Thomson International, 2008.

Índice general

UNIVERSIDAD
NACIONAL
DE MORENO

tu lugar, tu universidad, tu futuro...

ISBN 978-987-782-011-9

Universidad Nacional de Moreno
Av. Bartolomé Mitre 1891, Moreno (B1744OHC).
Provincia de Buenos Aires.
Teléfonos:
(+54 237) 466-1529/4530/7186
(+54 237) 488-3147/3151/3473
(+54 237) 425-1619/1786
(+54 237) 460-1309
(+54 237) 462-8629
www.unm.edu.ar
www.facebook.com/unimoreno

UNM 2010
UNIVERSIDAD DEL BICENTENARIO ARGENTINO