UNIVERSIDAD
NACIONAL
DE MORENO

ÁLGEBRA Y GEOMETRÍA ANALÍTICA (2011)

GUÍA DE PROBLEMAS

- INGENIERÍA EN ELECTRÓNICA

2017

DEPARTAMENTO DE CIENCIAS APLICADAS Y TECNOLOGÍA

UNIVERSIDAD NACIONAL DE MORENO

Rector
Hugo O. ANDRADE

Vicerrector
Manuel L. GÓMEZ

Secretaria Académica
Adriana M. del H. SÁNCHEZ

Secretario de Investigación, Vinculación Tecnológica y Relaciones Internacionales
Jorge L. ETCHARRÁN

Secretaria de Extensión Universitaria
M. Patricia JORGE

Secretario general
V. Silvio SANTANTONIO

Consejo Superior

Autoridades
Hugo O. ANDRADE
Manuel L. GÓMEZ
Jorge L. ETCHARRÁN
Pablo A. TAVILLA
M. Patricia JORGE

Consejeros

Claustro docente:
Marcelo A. MONZÓN
Javier A. BRÁNCOLI
Guillermo E. CONY (s)
Adriana M. del H. SÁNCHEZ (s)

Claustro estudiantil:
Rocío S. ARIAS
Iris L. BARBOZA

Claustro no docente:
Carlos F. D'ADDARIO

DEPARTAMENTO DE ECONOMÍA Y ADMINISTRACIÓN

Director - Decano
Pablo A. TAVILLA

Licenciatura en Relaciones del Trabajo
Coordinadora - Vicedecana
Sandra M. PÉREZ

Licenciatura en Administración
Coordinador - Vicedecano
Pablo A. TAVILLA (a cargo)

Licenciatura en Economía
Coordinador - Vicedecano
Alejandro L. ROBBA

Contador Público Nacional
Coordinador - Vicedecano
Alejandro A. OTERO

DEPARTAMENTO DE HUMANIDADES Y CIENCIAS SOCIALES

Directora - Decana
M. Patricia JORGE

Licenciatura en Trabajo Sicial
Coordinadora - Vicedecana
M. Claudia BELZITI

Licenciatura en Comunicación Social
Coordinador - Vicedecano
Roberto C. MARAFIOTI

Ciclo de Licenciatura en Educación Secundaria
Coordinadora - Vicedecana
Lucía ROMERO

Ciclo de Licenciatura en Educación Inicial
Coordinadora - Vicedecana
Nancy B. MATEOS

DEPARTAMENTO DE CIENCIAS APLICADAS Y TECNOLOGÍA

Director - Decano
Jorge L. ETCHARRÁN

Ingeniería en Electrónica
Coordinador Vicedecano
Daniel A. ACERBI (int)

Licenciatura en Gestión Ambiental
Coordinador - Vicedecano
Jorge L. ETCHARRÁN

Licenciatura en Biotecnología
Coordinador - Vicedecano
Fernando C. RAIBENBERG (int)

DEPARTAMENTO DE ARQUITECTURA, DISEÑO Y URBANISMO

Directora - Decana
N. Elena TABER (a cargo)

Arquitectura

Coordinadora - Vicedecana

N. Elena TABER (int.)

ÁLGEBRA Y GEOMETRÍA ANALÍTICA

(2011)

GUÍA DE PROBLEMAS

2017

Álgebra y geometría analítica 2011 : guía de problemas año 2017 / Fernando Chorny ... [et al.]. - 2a ed . - Moreno : UNM Editora, 2017.
Libro digital, PDF - (Cuadernos de cátedra)

Archivo Digital: descarga y online
ISBN 978-987-3700-55-2

1. Álgebra. 2. Geometría Analítica. I. Chorny, Fernando
CDD 512

Colección: Cuadernillos de Cátedra
Directora: Adriana M. del H. Sánchez
Autores: Fernando CHORNY
Pablo BONUCCI
Martín CHACÓN
Perla FERNÁNDEZ
Daniel JADER
Gastón BIDART GAUNA

2.ª edición: abril de 2017

Av. Bartolomé Mitre N.° 1891, Moreno (B1744OHC), prov. de Buenos Aires, Argentina
Teléfonos:
(0237) 466-7186 / 1529 / 4530
(0237) 488-3151 / 3147 / 3473
(0237) 425-1786 / 1619
(0237) 462-8629
(0237) 460-1309
Interno: 154
unmeditora@unm.edu.ar
http://www.unm.edu.ar/editora

La edición en formato digital de esta obra se encuentra disponible en:
http://www.unm.edu.ar/repositorio/repositorio.aspx
ISBN (version digital): 978-987-3700-55-2

Introducción

Este cuadernillo constituye la guía de problemas y ejercitación de la materia Álgebra y Geometría Analítica (AGA), para la carrera de Ingeniería en Electrónica.

Algunos de estos problemas serán abordados y discutidos durante las clases y otros quedarán a cargo de los estudiantes, para que resuelvan por fuera del tiempo en el aula.

Encontrarán que algunos de los problemas están identificados con íconos característicos:

El símbolo ( ) significa que el problema está pensado para resolverse con el apoyo del programa GeoGebra (`http://www.geogebra.org`), en algunos casos abriendo un archivo específico que será brindado por los profesores. Esto no significa que si el ícono no está presente no se pueda recurrir a GeoGebra. GeoGebra es una herramienta para el estudio, como lo son las calculadoras, los libros, Internet, etc. Parte de lo que se espera de los estudiantes de este curso es que conozcan esta variedad de recursos y aprendan a utilizarlos con libertad y criterio.

Los problemas pensados para desarrollar en clase están diseñados para que motiven debates que ayudarán a comprender distintos conceptos de la materia.

Pero, además de estos problemas conceptuales, es necesario que todos consigan adquirir habilidad para manejar procedimientos básicos de cálculo, sin los cuales no se puede acceder a plantear nuevos problemas conceptuales cada vez más interesantes. Por eso, al final de cada Unidad hay una sección con ejercitación variada para practicar, llamada **Ejercitación extra**.

A los ejercicios de esta sección se pueden sumar los de la bibliografía (ver página 126): todos los libros que allí figuran incluyen problemas y ejercicios para practicar el dominio de los conceptos y de los procedimientos. En algunos casos se mencionan explícitamente, es decir, la guía de problemas indica resolve determinados ejercicios de determinado libro. En otros, se espera que los estudiantes aprendan a consultarlos y se propongan resolverlos. Los alumnos que comiencen a consultar libros y a resolver sus problemas habrán dado un salto muy importante convertirse en estudiantes universitarios autónomos.

Es muy importante insistir en que el trabajo en la clase no es suficiente para garantizar el dominio de los temas que se abordarán. Los profesores del curso irán indicando la ejercitación que debe acompañar a lo que se haya desarrollado en la clase, para practicarlo y complementarlo.

Muchos estudiantes que ya han participado de este curso han comprendido el valor de juntarse a estudiar en grupo. Estudiando en grupo uno tiene siempre alguien que entiende un poco más, con quien puede discutir los temas y pedir o proponer explicaciones de las dudas que van apareciendo. Estudiando en grupo se confronta mejor la adversidad (inevitable en todos los niveles de estudio) de los momentos en los que cuesta comprender un concepto difícil. Estudiando en grupo se sostiene mejor la disciplina y el compromiso con la tarea. Estudiando en grupo se establecen vínculos intelectuales que en el mejor de los casos pueden ser también de amistad, pero que, por de pronto, son muy especiales y muy específicos de la vida académica y no pueden darse en otros ámbitos.

Fernando CHORNY
Pablo BONUCCI
Martín CHACÓN
Perla FERNÁNDEZ
Daniel JADER
Gastón BIDART GAUNA

Unidad 1: Vectores y geometría del plano $\mathbb{R}^2$

Contenidos: Coordenadas cartesianas en n-dimensiones. Representación gráfica de un vector. Operaciones con vectores: suma, producto de un escalar por un vector, combinación lineal. Interpretación geométrica. Interpretación en **GeoGebra** mediante deslizadores. Norma de un vector. Versor asociado a un vector. Nociones de trigonometría. Producto escalar, ángulo entre dos vectores. Paralelismo y perpendicularidad.

Objetivos de esta unidad.

- Familiarizarse con conceptos geométricos que servirán para ilustrar y ejemplificar muchos temas que desarrollaremos en la materia.
- Entender el vínculo que existe entre la geometría y el álgebra: cómo las ecuaciones modelizan objetos geométricos y permiten estudiar sus propiedades y abordar problemas acerca de ellos.
- Familiarizarse con el programa **GeoGebra** e incorporarlo como recurso para explorar e interpretar los problemas que abordaremos.
- Introducir los vectores geométricos de $\mathbb{R}^2$ en contextos geométricos, físicos y algebraicos.
- Incorporar hábitos y ritmo de estudio.

Paralelogramos.

Problema 1 ( ) Lean el siguiente recuadro:

> Llamamos **paralelogramo** a cualquier cuadrilátero que tiene sus lados opuestos paralelos.

Teniendo en cuenta la definición se pide construir e investigar:

a) Construyan un paralelogramo cuyos lados midan 6 cm y 4 cm. ¿Cuántos paralelogramos pueden construirse con esa condición?

b) ¿Qué podemos afirmar respecto de los ángulos interiores de los paralelogramos construidos en el ítem anterior? Analicen.

c) Al modificar los ángulos interiores, ¿qué otros elementos del paralelogramo se modifican? ¿Cuáles se mantienen constantes?

d) Construyan si es posible, en cada caso, un paralelogramo que cumpla la/las siguientes condiciones:

   (i) Uno de los ángulos interiores mide el doble que el otro.

   (ii) Uno de los ángulos interiores mide 90°.

   (iii) Las diagonales son iguales.

   (iv) Las diagonales no se cortan en su punto medio.

   (v) Las diagonales no son iguales.

   (vi) Las diagonales forman un ángulo de 90°.

   (vii) Las diagonales no forman un ángulo de 90°.

   (viii) Uno de sus lados mide 7 cm y 2 ángulos no opuestos midan uno 40° y el otro 120°.

   (ix) Un paralelogramo $ABCD$ tal que el ángulo BAC mida 40° y el ángulo BCD mida 60°.

Problema 2 ( ) En cada caso decidan si es posible construir un paralelogramo que cumpla con las siguientes condiciones:

a) Uno de los lados mide 7 cm, otro lado mide 4 cm y la diagonal mide 11 cm.

b) Uno de los lados mide 7 cm, otro lado mide 4 cm y la diagonal mide 10 cm.

c) Uno de los lados mide 7 cm, otro lado mide 4 cm y la diagonal mide 12 cm.

d) ¿Cómo debe ser la relación entre las longitudes de los lados y la diagonal en un cuadrilátero para que sea posible su construcción? Escriban alguna conclusión.

Problema 3 Dibujen un triángulo ABC. Por el vértice A tracen una paralela m a BC. Por el vértice B tracen una paralela n a AC. Por el vértice C tracen una paralela p a AB. Designen como M a la intersección de m con n, N a la intersección de n con p y P a la intersección de p con m. ¿Qué segmento piensan que es mayor: MB o BN? ¿Por qué? ¿Qué preguntas similares se pueden investigar en relación a los otros segmentos construidos?

Problema 4 ¿Cuál es la cantidad mínima de información que se requiere para que un paralelogramo quede determinado de forma única? Propongan ejemplos.

Problema 5 Construyan y luego analicen si los siguientes cuadriláteros tienen ejes de simetría y/o centro de simetría.

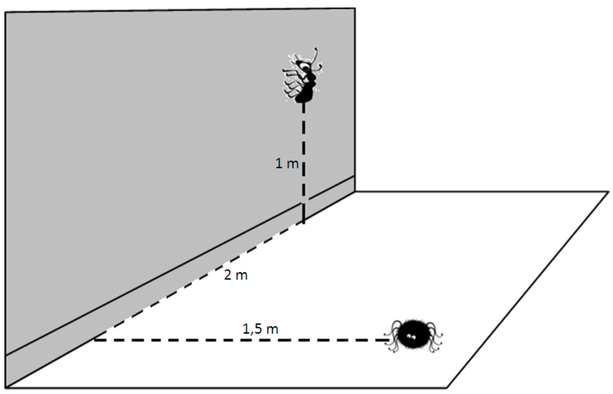
a) Un paralelogramo rectángulo no cuadrado.
b) Un paralelogramo rombo.
c) Un paralelogramo cuadrado.
d) Un paralelogramo no rectángulo ni rombo.
e) Un romboide.
f) Identificar ángulos y puntos simétricos.

Problema 6 ( ) Decidan en cada caso si es posible afirmar que la figura mencionada es un paralelogramo. Expliquen.

a) Un cuadrilátero que tiene un solo par de lados congruentes.
b) Un cuadrilátero que tiene dos pares de lados opuestos congruentes.
c) Un cuadrilátero que tiene cuatro ángulos congruentes.
d) Un cuadrilátero que tiene dos pares de ángulos congruentes.
e) Un cuadrilátero que no tiene eje de simetría.
f) Un cuadrilátero que tiene sus diagonales congruentes.
g) Un cuadrilátero que tiene sus diagonales perpendiculares.
h) Un cuadrilátero que tiene dos de sus lados consecutivos congruentes.

Trigonometría: Razones trigonométricas

Problema 7 La figura muestra el piso y la pared de una habitación. En el piso hay una araña. En la pared hay una hormiga. ¿Cuál es la menor distancia que puede caminar la araña para llegar a la hormiga?

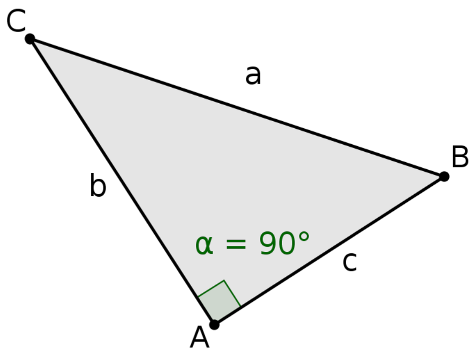


Problema 8 ( ) Esta actividad se desarrollará en base al archivo `TrianguloElastico.ggb` que el/la docente les facilitará.

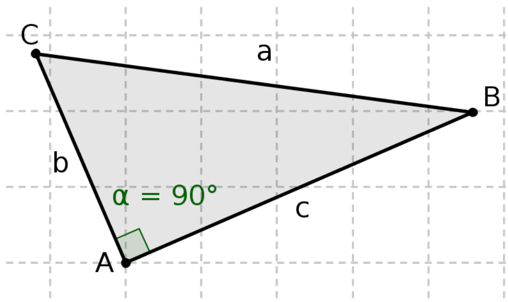
a) Investiguen el funcionamiento del archivo explicando: ¿Qué observan? ¿Qué cosas pueden cambiar? ¿Qué cosas no se pueden modificar? Modifiquen aquellas que puedan y observen qué ocurre con las demás.

b) Investiguen: ¿Cuánto medirá el lado BC, si la hipotenusa AC mide 23 y el ángulo α mide $72°$?

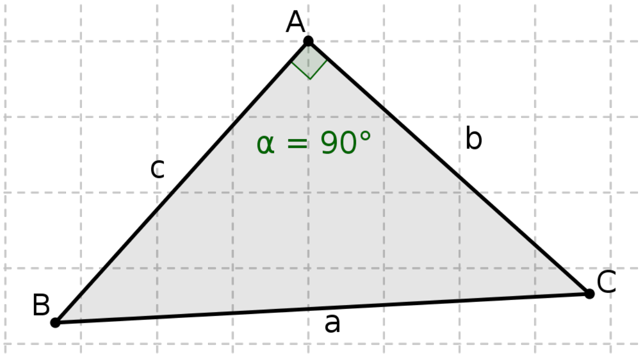
Problema 9 Lean el siguiente recuadro:

> **Teorema de Pitágoras:** En cualquier triángulo rectángulo donde la hipotenusa mide a y los catetos miden b y c resulta:
>
> $$a^2 = b^2 + c^2$$
>
> 
>

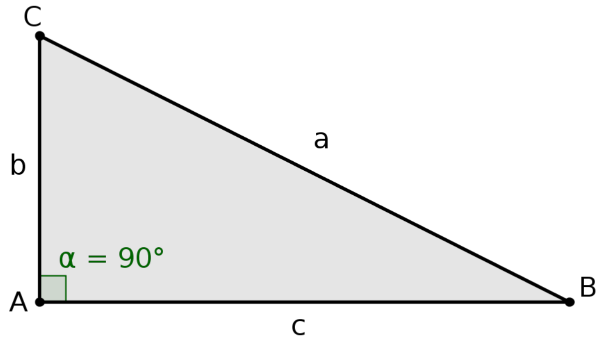
En el tríangulo ABC se sabe que AC mide 3 cm y AB mide 5 cm. ¿Cuánto mide BC?



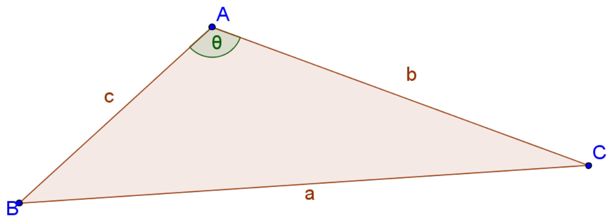
Problema 10 En el triángulo ABC se sabe que la hipotenusa mide $\sqrt{50}$ m y que los catetos son iguales. ¿Cuánto miden su perímetro y su superficie?



Problema 11 En el triángulo ABC se sabe que la hipotenusa mide $\frac{7}{2}\sqrt{5}$ m y que un cateto mide el doble del otro. ¿Cuánto miden su perímetro y su superficie?



Problema 12 Lean el siguiente recuadro:

> **Teorema del coseno:** En cualquier triángulo cuyos lados miden a, b y c resulta:
> $$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\theta)$$
> donde θ es el ángulo formado por los lados que miden b y c, como se ve en el gráfico.
>
> 
>

Sea $ABCD$ un paralelogramo tal que el lado AB mide 4 cm, el lado AD mide 6 cm y el ángulo BAD mide 26°.

a) Hallen las medidas de las alturas del paralelogramo.
b) Hallen la medida de la diagonal menor.
c) Hallen la medida de la diagonal mayor.

Problema 13 ( ) Sea $ABCD$ un paralelogramo tal que $ABC = 47°$, $BAC = 63°$ y el lado AB mide 7 cm.

a) Construyan una representación geométrica en **GeoGebra**.
b) Hallen la medida de los ángulos interiores del paralelogramo.
c) Hallen las medidas de AC y de BC.

Geometría analítica: coordenadas

Problema 14 ¿Cuánto mide el vector flecha que representa a cada uno de los siguientes puntos del plano?

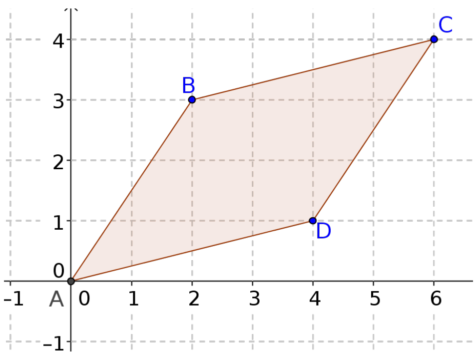
a) $A = (3, 4)$
b) $B = (-3, -4)$
c) $C = (-4, 3)$
d) $D = (17, 0)$
e) $E = (0, \frac{13}{41})$
f) $F = (0, 0)$
g) $G = (1, 1)$
h) $H = (2, 5)$
i) $I = (\frac{1}{2}, \frac{7}{3})$
j) $J = (p, q)$
k) $K = (\frac{a}{b}, \frac{b}{a})$, donde a y b son positivos.
l) $L = (\frac{a}{b}, \frac{b}{a})$, donde a es positivo y b es negativo.

Problema 15 En un sistema de ejes cartesianos, construyan un paralelogramo $ABCD$ de manera tal que sus diagonales midan 4 cm y 7 cm. Den las coordenadas de sus vértices.

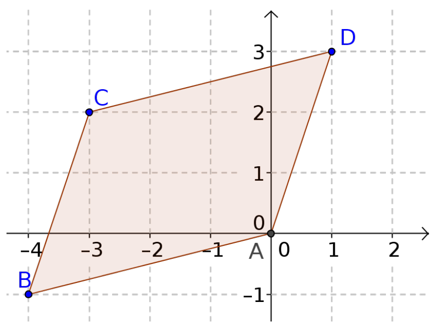
Problema 16 Para cada uno de los siguientes casos, se pide hallar las coordenadas del punto C y las medidas de las dos diagonales del paralelogramo ABCD

a) $A = (0, 0)$, $B = (4, 5)$, $D = (8, 0)$
b) $A = (0, 0)$, $B = (2, 4)$, $D = (7, 3)$
c) $A = (0, 0)$, $B = (\frac{5}{3}, \frac{7}{2})$, $D = (6, \frac{1}{3})$
d) $A = (0, 0)$, $B = (\frac{5}{3}, \frac{7}{2})$, $D = (6, \frac{1}{3})$

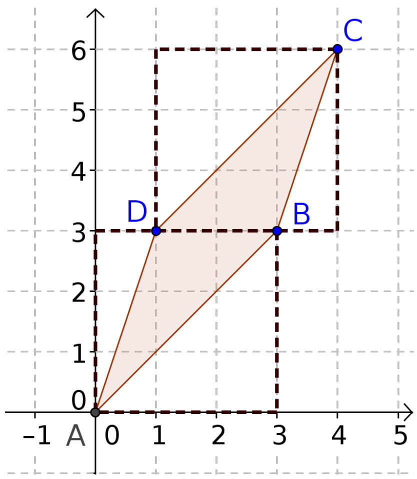
Problema 17 Calculen el área de los siguientes polígonos $ABCD$.



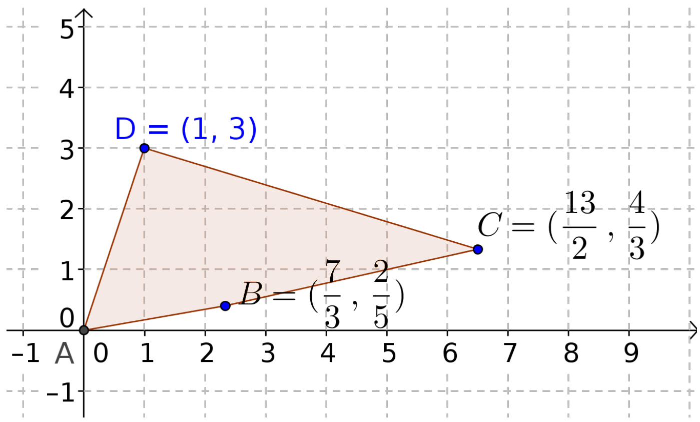
a)
¿Es un paralelogramo?



b)
¿Es un paralelogramo?



c)
¿Es un paralelogramo?



d)
¿Es un triángulo?

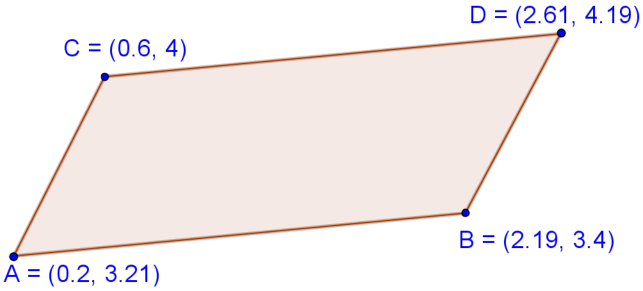
Problema 18 Sea $ABCD$ un paralelogramo tal que $A = (\frac{3}{2}, 2)$, $B = (3, 5)$ y $C = (6, 1)$

a) Hallen las coordenadas del punto de intersección entre las diagonales del paralelogramo $ABCD$.

b) Construyan un paralelogramo que tenga la mitad del perímetro del paralelogramo $ABCD$ y den las coordenadas de sus vértices.

c) Construyan un paralelogramo que tenga el triple de área del paralelogramo $ABCD$ y den las coordenadas de sus vértices.

Problema 19 La figura muestra un cuadrilátero $ABDC$ con el detalle de las coordenadas de sus vértices. Atención: la coma (,) separa la coordenada x de la coordenada y, mientras que el punto (.) es la separación entre la parte entera y la parte decimal de los números. Decidan si el cuadrilátero es un paralelogramo.



Problema 20 ( ) La siguiente actividad se desarrollará en clase, utilizando el archivo **TiroAlBlanco.ggb**. Se trata de un juego con las siguientes reglas (para comprenderlas tienen que tener el archivo abierto enla pantalla):

Se enfrentan dos jugadores.

El Jugador 1 dispone una posición inicial de los vectores $\bar{u}$ y $\bar{v}$ (arrastrando desde los extremos rojos) y una posición del punto azul.

El jugador 2 debe ingresar números (mediante el teclado) en las casillas que dicen “Alcance de u” y “Alcance de v” y luego disparar (mediante el botón correspondiente). Si acierta se anota 5 puntos. Si no acierta, debe pulsar el botón de reinicio e intentar un nuevo disparo.

El jugador 2 repite el paso anterior hasta 5 veces. Si acierta el tiro se anota $5 - N$ puntos, donde N es el número de tiros no acertados. Si erra el quinto tiro, se anota 0 puntos y los jugadores cambian de rol.

Jueguen un rato al **Tiro al blanco** y discutan en clase cuáles son las estrategias que encuentran para tener más chances de ganar.

Problema 21 Respondan las siguientes preguntas acerca del juego **Tiro al blanco**.

a) Si el punto azul está en $(3, 5)$ y los vectores que dirigen el tiro son $\bar{u} = (1, 0)$ y $\bar{v} = (0, 1)$, ¿qué alcance hay que darles para acertar el tiro?

b) Si el punto azul está en $(7, 8)$ y los vectores que dirigen el tiro son $\bar{u} = (3, 5)$ y $\bar{v} = (4, 3)$, ¿qué alcance hay que darles para acertar el tiro?

c) Mauro y Hernán están jugando al Tiro al blanco. Mauro coloca el punto azul en $(1, 3)$, y elige un vector $\bar{u} = (-2, 5)$. Luego ubica el vector $\bar{v}$. Cuando Hernán ve la posición de los vectores $\bar{u}$ y $\bar{v}$ dice: "*Mmm... Ganaste: es imposible que le pueda dar al punto azul*" ¿Qué posición puede haber elegido Mauro para el vector $\bar{v}$?

d) Martín y Perla estaban jugando un partido de **Tiro al Blanco**. Martín disparó al punto azul con $\bar{u} = (2, -3)$ dándole al alcance de $\bar{u}$ el valor 7. Con eso le pegó al punto azul que estaba en $(-3, 1)$. ¿Cuál creen que era el vector $\bar{v}$ que le había propuesto Perla y qué alcance le dio Martín? ¿Hay más de una posibilidad?

Problema 22 Aprender a estudiar. Escriban un apunte en el que se expliquen y se propongan ejemplos (con cálculos y con gráficos) de los siguientes conceptos, que aparecieron en los problemas de esta sección:

- Suma de vectores.
- Multiplicación de un escalar por un vector.
- Longitud o norma de un vector.
- Ángulo entre dos vectores.
- Combinación lineal de dos vectores.

Para encontrar la información pueden utilizar –entre otras– algunas de las siguientes fuentes:

- Ordenar y reescribir los apuntes tomados en clase.
- Leer el capítulo 3 del libro **Introducción al Álgebra Lineal**, de Howard Anton. (Ver [2]; el libro está en la Biblioteca).
- Buscar otros libros de Álgebra Lineal en la Biblioteca.
- Visitar la página `https://es.khanacademy.org/`. Esta página ofrece videos con explicaciones muy elementales de distintos temas. Los temas se pueden encontrar navegando dentro de la página desde una solapa con el título TEMAS que aparece en una barra horizontal arriba de la página.

Problema 23 Aprender a estudiar. Intenten leer el capítulo capítulo 3 del libro **Introducción al Álgebra Lineal**, de Howard Anton, con las siguientes consideraciones:

a) Algunos temas estarán presentados en forma muy parecida a la vista en clase y otros en forma distinta. Reflexionen:
   (i) ¿Me resulta útil volver a leer en forma más ordenada los temas que ya vi en clase?
   (ii) ¿Puedo adaptarme y comprender los temas que están explicados de manera distinta?

b) En ese capítulo se presentan también los vectores del espacio tridimensional $\mathbb{R}^3$:

(i) ¿Me sirve lo que aprendí de vectores en $\mathbb{R}^2$ para entender las explicaciones y los ejemplos de vectors en $\mathbb{R}^3$, aunque ese tema todavía no se haya desarrollado en la clase?

(ii) ¿Soy capaz de saltear los temas que no comprendo o que no quiero leer en este momento y encontrar, más adelante, los que sí necesito?

c) En varias secciones del capítulo aparecen ejercicios:

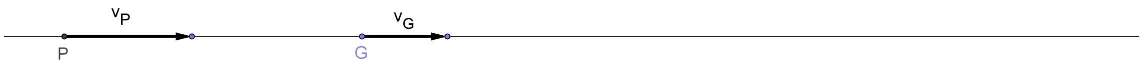
(i) ¿Puedo darme cuenta leyendo los enunciados de cuáles ejercicios son similares a los que aparecen en esta guía y cuáles son muy distintos?

(ii) ¿Soy capaz de intentar resolverlos (unos y otros)?

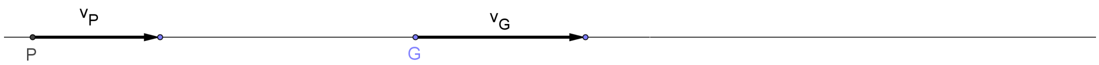
d) La lectura de un libro de matemática debe hacerce en forma interactiva: con lápiz y papel y también con **GeoGebra**. Intenten resolver todos los ejercicios que puedan, entre los del capítulo.

Velocidades relativas y suma de vectores

Problema 24 En cada dibujo, están ubicados el punto P (perro) y el punto G (gato). Las flechas $\overrightarrow{v_P}$ y $\overrightarrow{v_G}$ representan la distancia que recorre cada uno por unidad de tiempo, la dirección y el sentido de movimiento. Para cada caso, encuentren una estrategia que permita saber si el gato y el perro se encuentran y dónde lo hacen.

a)


b)


c)


d)


e)

f)

g)

Problema 25 Teniendo en cuenta la resolución del problema anterior.

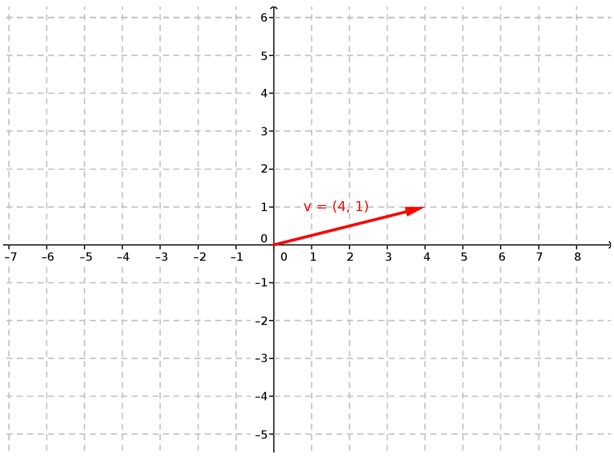
a) Describan una única estrategia general que permita resolver todos los casos de la actividad anterior.

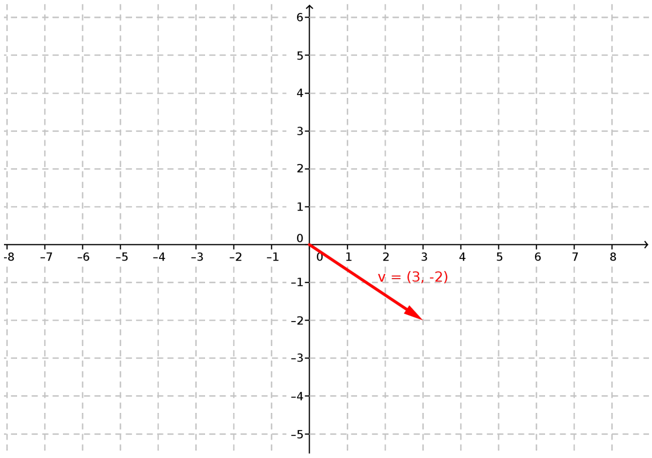
b) ¿Qué características del movimiento de los animales tuvieron que tener en cuenta para tomar la decisión de si se encuentran o no?

c) ¿Qué condición o condiciones se deben cumplir para que el perro atrape al gato?

Producto escalar y ángulo entre vectores

Problema 26 Cada una de las figuras muestra un vector $\overrightarrow{v}$.





a) En cada caso, propongan las coordenadas y grafiquen tres vectores distintos que sean perpendiculares a $\bar{v}$.

b) ¿Cómo podrían usar el teorema de Pitágoras para decidir si los vectores propuestos en el punto anterior son efectivamente perpendiculares a $\bar{v}$?

c) Adapten la idea del punto anterior para decidir si los siguientes vectores son perpendiculares: $\bar{v} = \begin{pmatrix} 1,7 \\ 3,6 \end{pmatrix}$ y $\bar{w} = \begin{pmatrix} -4,3 \\ 2,1 \end{pmatrix}$.

d) Adapten la misma idea para decidir si cualquier par de vectores $\bar{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ y $\bar{w} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ son perpendiculares.

Problema 27 Elijan algún vector $\bar{v}$ e investiguen:

a) ¿Para qué valores del escalar λ resulta la norma de $\lambda\bar{v}$ mayor que la norma de $\bar{v}$?

b) ¿Para qué valores del escalar λ resulta la norma de $\lambda\bar{v}$ menor que la norma de $\bar{v}$?

Problema 28 Se propone el siguiente juego en equipos de cuatro personas: un árbitro del juego propondrá –anotándolo en el pizarrón– un vector de $\mathbb{R}^2$. A partir de ese momento, cada equipo deberá proponer un escalar, de manera que la norma del vector que resulta de multiplicar por el escalar al vector propuesto por el árbitro sea exactamente 1. Hay un minuto para escribir el escalar en un papel y entregárselo al árbitro. Después de ese minuto se resolverán los cálculos necesarios para ver qué equipos acertaron. Gana el que se aproxime mejor al resultado correcto. Si hay empates, gana el equipo que le entregó primero el papel al árbitro.

a) Antes de jugar, reúnanse entre los compañeros de equipo y piensen una estrategia conveniente para el juego.

b) Que gane el mejor.

c) Variante: el árbitro propone, además del vector de $\mathbb{R}^2$, un número positivo cualquiera. Ahora el vector que resulta de multiplicar por el escalar al vector propuesto por el árbitro debe tener por medida exactamente el número positivo que el árbitro también propuso.

Problema 29 En distintos problemas y situaciones que iremos proponiendo será importante conseguir vectores de norma 1. ¿Para qué valores del escalar λ resulta $\|\lambda\bar{v}\| = 1$?

Problema 30 Calculen $\|\bar{v}\|$ siendo $\bar{v} = (4, -3)$. Calculen $w = \frac{\bar{v}}{\|\bar{v}\|}$. Hallen $\|\bar{w}\|$.

Problema 31 Hallen $\|\bar{v}\|$ siendo $\bar{v} = (a, b)$. Hallen $\bar{w} = \frac{\bar{v}}{\|\bar{v}\|}$. Hallen $\|\bar{w}\|$. ¿Qué norma tiene $\bar{w}$?

Problema 32 Calculen el producto escalar entre los vectores $\bar{v} = (-1, 3)$ y $\bar{w} = (2, 9)$ de dos maneras distintas. Comparen los resultados. ¿Cómo harían para hallar el ángulo entre ellos utilizando los dos modos que usaron?

Problema 33 Calculen el producto escalar entre los vectores $\bar{v} = (a, b)$ y $\bar{w} = (c, d)$ de dos maneras distintas. Comparen los resultados. ¿Cómo harían para hallar el ángulo entre ellos utilizando los dos modos que usaron?

Problema 34 Grafiquen los vectores $\bar{u} = (2, 5)$ y $\bar{v} = (3, 6)$. Hallen los ángulos que forman cada uno de los vectores con el eje horizontal. Luego utilicen los resultados para hallar el ángulo que forman los vectores $\bar{u}$ y $\bar{v}$.

Problema 35 Calculen el ángulo entre los vectores $\bar{u}$ y $\bar{v}$ utilizando la fórmula vista en clase y comparen con el resultado obtenido en el ítem anterior.

Problema 36 Un avión está situado en la posición $(3, 4)$ al mediodía y 15 minutos después se encuentra en la posición $(6, 5)$. ¿Cuál fue el ángulo de elevación del avión? Un momento después descendió un ángulo de $40°$ desde la posición anterior, a la posición $(8, m)$ ¿Cuál es entonces el valor de m?

Problema 37 Dados los vectores $\bar{u}$ y $\bar{v}$ hallen, en cada caso: $\bar{u} \cdot \bar{u}$, $\bar{v} \cdot \bar{v}$, $\bar{u} \cdot \bar{v}$ y el ángulo entre $\bar{u}$ y $\bar{v}$ siendo:

a) $\bar{u} = (2, -1)$ y $\bar{v} = (-1, 1)$

b) $\bar{u} = (0, 1)$ y $\bar{v} = (1, 0)$

c) $\bar{u} = (-1, 3)$ y $\bar{v} = (0, 4)$

Problema 38 Prueben que $(\bar{u} \cdot \bar{u}) = \|\bar{u}\|^2$.

Problema 39 Consideren los vectores $\bar{u} = (-1, 3)$ y $\bar{v} = (a, 1)$. Investiguen para qué valores de a el ángulo entre $\bar{u}$ y $\bar{v}$ es agudo, recto u obtuso.

Problema 40 Investiguen: ¿cuántos vectores existen que formen con $\bar{u} = (5, 3)$ un ángulo de $55°$?

Problema 41 ¿Existe algún valor de y para que el producto escalar entre $\bar{a} = (4, 3)$ y $\bar{b} = (-1, y)$ valga 2?

Problema 42 Determinen los ángulos del triángulo cuyos vértices son: $(9, 5)$, $(7, 3)$ y $(4, 5)$.

Problema 43 Se sabe que los vectores $\bar{v}$ y $\bar{w}$ son ortogonales y tienen la misma norma. Si $\bar{v} = (2, 5)$, hallen las coordenadas de $\bar{w}$. Analicen si la solución es única y justifiquen.

Problema 44 Encuentren dos vectores que:

a) Sean ortogonales a $(5, -2)$. ¿Cuántas posibilidades hay?

b) Sean ortogonales a (a, b). ¿Cuántas posibilidades hay?

Problema 45 Propongan cuatro vectores con los que sea posible construir una figura plana de cuatro lados no todos iguales, de manera que uno de sus ángulos interiores mida $45°$.

Ejercitación extra

(1) La leyenda atribuye a Tales de Mileto (griego, s. IV a. C.) la hazaña de haber estimado la altura de la Pirámide de Keops, en el curso de un viaje a Egipto, en el que se nutrió de los saberes matemáticos de este pueblo. Los instrumentos utilizados por Tales fueron una vara, de longitud conocida, y los rayos del Sol. La Figura 1.1 muestra un esquema en el que se ve cómo los rayos del Sol marchan paralelos (piensen por qué es razonable considerarlos así) y provocan las sombras de la pirámide y la vara.

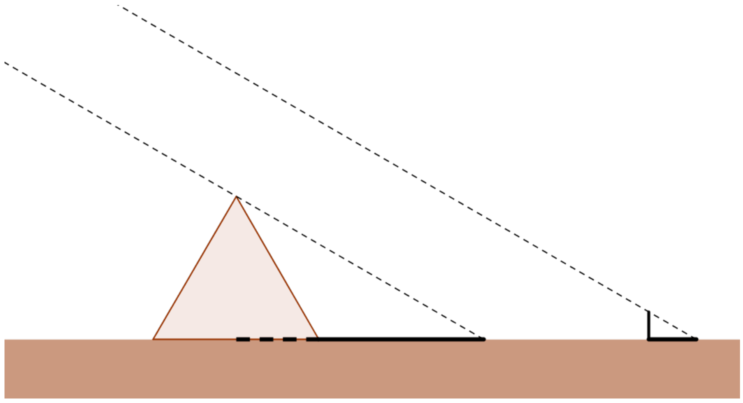


Figura 1.1

Supongamos ahora que a una hora determinada del día, la sombra de la pirámide medía 280 metros (aunque está claro que en los tiempos de Tales no se medían en metros las longitudes), la sombra del bastón medía 2,87 metros y la altura de dicho bastón era de 1,5 metros.

a) ¿Cómo se puede utilizar esta información para deducir la altura de la pirámide? ¿Hay otra información necesaria?

b) Calculen la altura de la pirámide.

(2) Bernardo y Carmen van a jugar una carrera partiendo desde un punto B y uno C respectivamente, hasta un árbol, que se encuentra en un punto A. Bernardo conoce la distancia a la que está del árbol, 63 m, y a la que está de Carmen, 42m. Además conoce los ángulos que se muestran en la siguiente Figura 1.2.

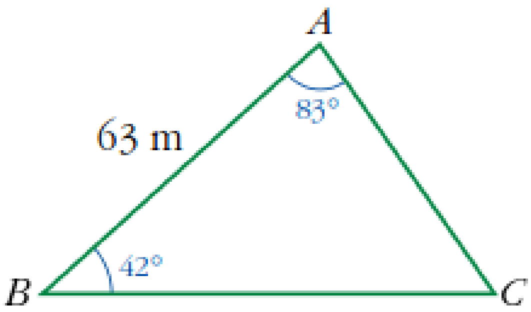


Figura 1.2

Si ambos corren a la misma velocidad, ¿Quién ganará la carrera?

(3) Encuentren dos vectores $\bar{w}_1$ y $\bar{w}_2$ perpendiculares al vector $\bar{v} = (3, -4)$ cuyas normas sean iguales a 1. ¿Son los únicos que cumplen esta propiedad? Justifiquen y realicen un gráfico que ilustre el los elementos del problema.

(4) Una mosca se para en la pared de un cuarto. La esquina inferior izquierda de la pared se selecciona como el origen de un sistema de coordenadas cartesianas en dos dimensiones. Si la mosca está parada en el punto que tiene coordenadas $(2, 1)$ (en metros):

a) ¿A qué distancia está de la esquina del cuarto?

b) Si la pared mide 4 m de ancho y 3 m de alto, ¿a qué distancia se encuentra del resto de las esquinas?

(5) a) Dado los vectores $\bar{v} = (3, 4)$ y $\bar{w} = (1, k)$, encuentren todos los valores de k de forma tal que el ángulo entre $\bar{v}$ y $\bar{w}$ sea de $45°$.

b) Encuentren las coordenadas del vector $\bar{u} = \bar{v} - \bar{w}$, calculen su norma y encuentren un vector perpendicular a él.

(6) Calculen el ángulo α que se forma entre los vectores:

a) $\bar{v} = (3, 4)$ y $\bar{u} = (8, 6)$.

b) $\bar{w} = (1, 7)$ y $\bar{s} = (3, 4)$.

(7) Sean $M = (5, 2)$, $N = (3, 1)$, $P = (4, 0)$ y $Q = (2, 9)$.

a) Hallen las coordenadas de los vectores $\bar{MN}$ y $\bar{PQ}$. Grafíquenlos.

b) Decidan si los vectores $\bar{MN}$ y $\bar{PQ}$ son paralelos.

c) Obtengan un punto R tal que $\bar{MP}$ y $\bar{RN}$ sean paralelos y tengan sentidos contrarios. Grafiquen.

d) Propongan un vector $\bar{v}$ que sea perpendicular a los anteriores.

(8) Sean $\bar{v} = (1 - \beta, \beta + 2)$ y $\bar{w} = (2, -\beta)$. Encuentren los valores de β para que $\bar{v}$ y $\bar{w}$ sean paralelos. Representen ambos vectores gráficamente e indiquen si conservan, o no, el sentido.

(9) Un barco situado en la posición $(1, 0)$ en una carta de navegación (con el norte en la dirección del semieje y positivo) divisa una roca en la posición $(2, 4)$. ¿Cuál es el vector que une el barco con la roca? ¿Qué ángulo α forma este vector con la dirección norte?

(10) Las fuerzas físicas tienen magnitud y dirección, de modo que pueden representarse como vectores. Si actúan simultáneamente varias fuerzas sobre un cuerpo, la fuerza resultante está representada por la suma de los vectores fuerza individuales. Supongamos que sobre un objeto actúan las siguientes fuerzas $\bar{F}_1 = (1, 3)$ y $\bar{F}_2 = (5, 4)$, ¿qué tercera fuerza habría que aplicar al objeto para contrarrestar el efecto de las dos primeras?

(11) Calculen la norma de un vector $\bar{u}$ sabiendo que el producto escalar $\bar{u} \cdot \bar{v} = 12$, la norma de $\bar{v}$ es igual a 2 y el ángulo α que se forma entre $\bar{u}$ y $\bar{v}$ es $30°$.

(12) Dados los vectores $\bar{u} = (1, 2)$ y $\bar{v} = (3, -1)$, encuentren el vector correspondiente a la siguiente combinación lineal $\bar{w} = 2\bar{u} + 3\bar{v}$.

(13) Un barco se mueve con un vector de velocidad $\bar{b_1} = (3, 4)$ en las aguas del puerto. Sin embargo, una vez que ingresa al canal del río principal, uno de los marineros observa que ahora se mueve con un vector de velocidad $\bar{b_2} = (1, 1)$. Las velocidades vienen dadas en metros por segundo (m/s).

a) ¿Cuál es la velocidad de la corriente del río?

b) ¿En qué dirección está fluyendo la corriente?

(14) El vector $\bar{u} = (2, 1)$, ¿se puede expresar como combinación lineal de los vectores $\bar{v} = (3, -2)$ y $\bar{w} = (1, 4)$?

(15) Encuentren y escriban una combinación lineal de los vectores $\bar{u}$ y $\bar{v}$ que permita, en el juego del Tiro al Blanco, hacertarle al punto $A = (19, 13)$.

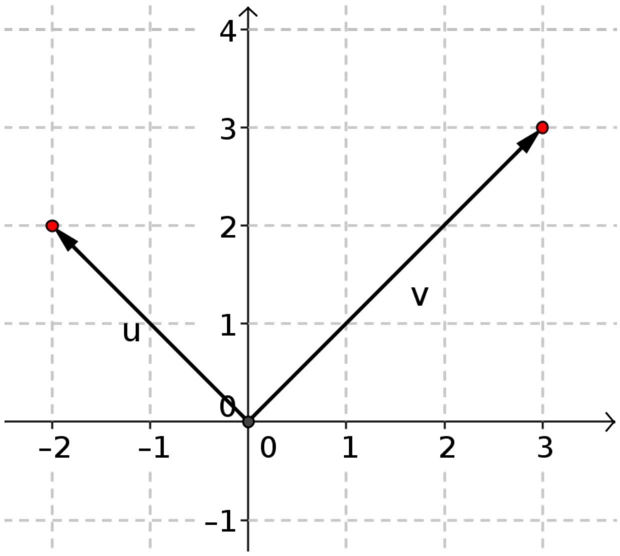


Figura 1.3

(16) Sean los vectores $\bar{u} = (2, 3, 7)$ y $\bar{v} = (2, -\frac{2}{5}, b)$.

a) Hallen un valor de b para que la norma de $\bar{v}$ sea 13.

b) Hallen un valor de b para que $\bar{u}$ y $\bar{v}$ sean perpendiculares.

c) Hallen un valor de b para que $\bar{u}$ y $\bar{v}$ formen un ángulo de $60°$.

Grafiquen $\bar{u}$ y $\bar{v}$ en cada caso.

(17) Sean $M = (5, 1, 2)$, $N = (0, 3, 1)$, $P = (4, 0, -1)$ y $Q = (2, -2, 9)$

a) Encuentren las coordenadas de los vectores $\bar{MN}$ y $\bar{PQ}$. Representen gráficamente.

b) Encuentren las coordenadas de un vector $\bar{v}$ que sea paralelo a $\bar{MN}$ y otro vector $\bar{w}$ que sea perpendicular a $\bar{PQ}$.

c) Obtengan un punto R tal que $\bar{MP}$ y $\bar{RN}$ sean paralelos.

GNU Octave

Octave o **GNU Octave** es un programa libre para realizar cálculos numéricos. Como su nombre indica, es parte del proyecto GNU. Es considerado el equivalente libre de MATLAB. Entre varias características que comparten, se puede destacar que ambos ofrecen un intérprete, permitiendo ejecutar órdenes en modo interactivo. Octave no es un sistema de álgebra computacional, como lo es Maxima, sino que está orientado al análisis numérico[1].

En estas secciones, al final de algunas unidades, nos iremos familiarizando con el ambiente y la sintaxis de GNU Octave, para ir conociendo las funciones más elementales esta poderosa herramienta al servicio de la ingeniería, la matemática aplicada y la ciencia en general.

Otras secciones más que aún no integran este cuadernillo se irán incorporando a las clases durante la cursada. Es muy recomendable el libro [5] que incluye en su desarrollo una progresiva y clara introducción a MATLAB, que resulta completamente compatible con GNU Octave y completará el panorama para esta primera aproximación al software.

Operaciones con vectores.

(O1)

a) Lean el siguiente recuadro:

> En GNU Octave podemos ingresar tanto vectores fila, por ejemplo $\bar{v} = (1, 3, 2)$, como vectores columna, por ejemplo $\bar{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$. Para definir el vector $\bar{v}$ debemos tipear:
>
> $$v = [1 \;\; 3 \;\; 2].$$
>
> En cambio, si queremos definir el vector $\bar{u}$ debemos tipear:
>
> $$u = [1 \;\; 2 \;\; 4]',$$
>
> o bien
>
> $$u = [1; 2; 4].$$

b) Ingresen los siguientes vectores en GNU Octave:

[1] Fuente: Wikipedia.

(i) $\bar{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ (iii) $\bar{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$ (v) $\bar{e} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

(ii) $\bar{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ (iv) $\bar{d} = \begin{pmatrix} -2 \\ \frac{1}{2} \\ 2 \end{pmatrix}$ (vi) $\bar{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

c) Dado que en el ítem anterior le asignamos un nombre a los vectores que ingresamos en GNU Octave, estos estarán disponibles para utilizarlos luego, ya sea para operar con ellos como para utilizarlos de otra manera. Esto es, si ingresamos un vector que llamamos $\bar{u}$ y otro que llamamos $\bar{v}$ podremos efectuar, por ejemplo, las operaciones $\bar{u} + \bar{v}$ o $5 \cdot \bar{v}$. Para realizar la operación $\cdot$ utilizamos $*$.

Realicen las siguientes operaciones:

(i) $\bar{a} + \bar{b}$. (iii) $\bar{d} - \bar{e}$. (v) $\bar{e} + \bar{f}$.

(ii) $3 \cdot \bar{a} - 4 \cdot \bar{c}$. (iv) $2 \cdot \bar{f} - 2 \cdot \bar{b}$. (vi) $3 \cdot \bar{a} - 2 \cdot \bar{b} + \bar{c}$.

(O2) a) Lean el siguiente recuadro:

> Para calcular el producto escalar entre dos vectores necesitamos que el primero de ellos se encuentre en forma de vector fila y el segundo como vector columna. Supongamos que queremos calcular el producto escalar $\bar{v} \cdot \bar{u}$, donde $\bar{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ y $\bar{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Para ello debemos ingresar :
>
> $$v = [1 \;\; 4]$$
>
> $$u = [2; 1],$$
>
> y luego realizar el producto
>
> $$v * u.$$

b) Verfiquen los resultados obtenidos en los problemas 26c)), 32 y 37.

(O3) a) Lean el siguiente recuadro:

> Dado un vector $\bar{v}$, sabemos que el producto $\bar{v} \cdot \bar{v} = \|\bar{v}\|^2$. Queremos aprovechar esto para calcular el módulo de un vector.
>
> En el ejercicio anterior vimos cómo calcular el producto escalar entre dos vectores, entonces sólo necesitamos agregar a este procedimiento lo siguiente:
>
> $$sqrt(v * v').$$

b) Calculen el módulo del los siguientes vectores:

(i) $\bar{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

(ii) $\bar{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

(iii) $\bar{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(iv) $\bar{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$.

(v) $\bar{e} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(vi) $\bar{f} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

c) Verifiquen el resultado obtenido en el problema 30.

Observación. *Notemos que si no queremos que GNU Octave nos muestre en pantalla el resultado de cierta operación debemos agregar el símbolo* $;$ *al final de la misma. Por ejemplo:*

$$A = 4 + 5;$$

La variable A *guardará el resultado de la operación definida pero el mismo no aparecerá en pantalla.*

Unidad 2: Rectas y planos en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$

Contenidos: Rectas en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$. Ecuación vectorial o paramétrica de la recta. Rectas paralelas, perpendiculares y alabeadas. Plano en $\mathbb{R}^3$. Ecuación paramétrica y cartesiana. Vector normal al plano. Producto vectorial. Recta como intersección de dos planos. Representación gráfica. Representación gráfica en $\mathbb{R}^3$. Visualización con **GeoGebra** 3D. Distancia de un punto a una recta, de un punto a un plano. Distancia entre dos rectas alabeadas.

Objetivos de esta unidad.

- Describir rectas y planos mediante representaciones gráficas y distintas ecuaciones.
- Modelizar y resolver distintos problemas geométricos que involucran puntos, rectas y planos, mediante ecuaciones y sistemas de ecuaciones.
- Incorporar el uso de la ventana 3D de **GeoGebra** y las herramientas más usuales.
- Introducir los vectores geométricos de $\mathbb{R}^3$ en contextos geométricos, físicos y algebraicos.
- Incorporar hábitos y ritmo de estudio.

Rectas.

Problema 1

a) Expliquen en palabras qué sucede con un vector $\bar{v}$ de $\mathbb{R}^2$ cuando se lo multiplica por distintos números reales λ. Construyan ejemplos, si les resulta necesario.

b) Grafiquen a mano, en una hoja cuadriculada, los puntos del plano que son de la forma

$$\lambda(3,2)+(-1,4)$$

para los posibles valores del número real λ.

(i) Decidan si $(533,805)$ es o no uno de esos puntos.

(ii) Decidan si $(363,548)$ es o no uno de esos puntos.

c) ( ) Exploren los siguientes recursos de **GeoGebra** para realizar el gráfico que se pide en el punto anterior:

(i) Construyan los vectores `u=(3,2)`, `v=(-1,4)` y un deslizador λ. Luego definan en la barra de entrada: `w=λ*u+v` y muevan el deslizador λ a lo largo de su recorrido[2].

(ii) Construyan los puntos `A=(3,2)`, `B=(-1,4)` y un deslizador λ. Luego definan en el Campo de Entrada: `C=λ*A+B` y muevan el deslizador λ. (Observen que **GeoGebra** considera que `u=(3,2)` y `A=(3,2)` son objetos distintos, si uno está nombrado con minúscula y otro con mayúscula; observen también que las coordenadas de los vectores deben separarse por coma (,) y NO por punto y coma (;), ya que para **GeoGebra** el punto y coma tiene otro significado, que si desean pueden investigar).

d) (i) Expliquen en palabras qué sucede con la recta de ecuación $(x,y)=\lambda(1,3)$ cuando se suma el vector $(2,5)$ de modo que la nueva ecuación es $(x,y)=\lambda(1,3)+(2,5)$

(ii) ¿Se puede asegurar que la recta de ecuación $(x,y)=\lambda(1,3)+(2,5)$ pasa por el punto (1,3)? Expliquen por qué en un texto de no menos de cinco renglones (el texto puede contener cálculos y/o ecuaciones).

(iii) ¿Se puede asegurar que la recta de ecuación $(x,y)=\lambda(1,3)+(2,5)$ pasa por el punto (2,5)? Expliquen por qué en un texto de no menos de cinco renglones (el texto puede contener cálculos y/o ecuaciones).

(iv) Encuentren un vector (a,b), distinto de $(2,5)$, para que la recta de ecuación $(x,y)=\lambda(1,3)+(a,b)$ pase por el punto (2,5).

Problema 2 La Figura 2.4 muestra el interior de una habitación con un punto P flotando en el aire. Para describir la posición del punto P se utilizan tres coordenadas que están indicadas. También hay dos linternas que iluminan el punto y que provocan que su sombra se proyecte en una pared y en el piso.

a) Interpreten el significado de las coordenadas $(1,2,3)$. Ubiquen en la habitación, dibujándolo en la figura, un punto Q de coordenadas $(3,1,2)$ y otro punto R, de coordenadas $(2,3,1)$.

b) ¿Cuáles son las coordenadas que describen la posición de la sombra de P en la pared?

[2] La letra griega λ se llama *lambda*. Es la variable que tradicionalmente se usa para estas ecuaciones. Por supuesto que cada uno puede elegir la variable que quiera y escribir, por ejemplo, $k(3,2)+(-1,4)$. Pero **GeoGebra** adopta la costumbre de usar la letra λ. Por eso la usamos acá, para que la conozcan.

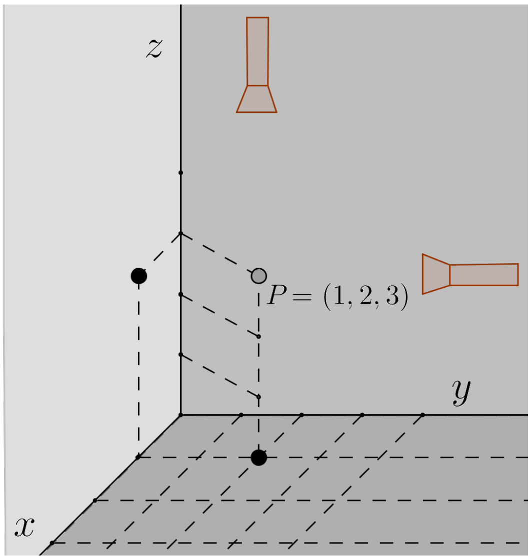


Figura 2.4: P flota en el aire, en una habitación.

c) ¿Cuáles son las coordenadas que describen la posición de la sombra de P en el piso?

Problema 3 La Figura 2.5 muestra otra vez a P en la misma posición que antes. El punto blanco en el piso representa una fuente de luz.

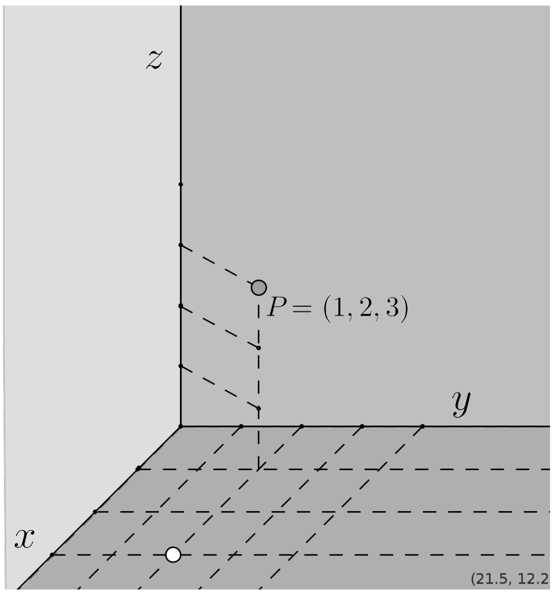


Figura 2.5: P en el aire y una vela en el piso.

a) Dibujen en la figura el punto de la pared del fondo en el que piensan que se proyectará la sombra de P.
b) ¿Cómo calcularían las coordenadas de la sombra en la pared?

Problema 4 Repitan el problema anterior, pero considerando la nueva posición de la fuente de luz, que se ve en la Figura 2.6.

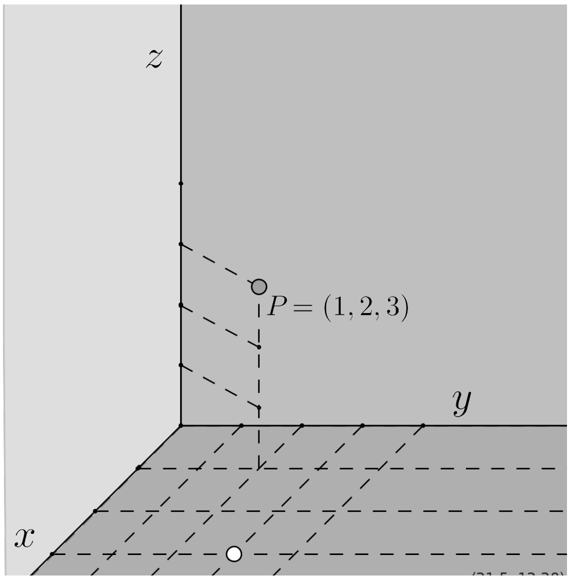


Figura 2.6: P en el aire y otra vela en el piso.

Problema 5 Lean la siguiente explicación:

La ecuación vectorial

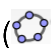
$$(x, y) = \lambda(a, b) + (p, q)$$

describe una recta en $\mathbb{R}^2$. El vector (a, b) determina la dirección de la recta. El número λ es variable (se lo suele llamar **parámetro**), recorre todos los reales y va determinando distintos puntos (x, y) de la recta. Además, (p, q) es un punto de paso de la recta (lo que significa que la recta lo contiene o *pasa por él*), ya que $(x, y) = (p, q)$ para el caso en que es $\lambda = 0$.

Una ecuación vectorial similar permite describir rectas en el espacio:

$$(x, y, z) = \lambda(a, b, c) + (p, q, r)$$

La versión actual de **GeoGebra** tiene una ventana de vista gráfica en 3D. En las siguientes preguntas, que el/la docente irá planteando, exploraremos un poco esta versión del programa, y comenzaremos a visualizar vectores y rectas en el espacio. Si disponen de una versión más antigua, necesitarán acceder a `https://www.geogebra.org/download` y actualizar la versión.

Problema 6 ()

a) Consigan que **GeoGebra** grafique una recta de dirección $(2, 1)$, que pase por el punto $(3, 4)$.

   (i) ¿De cuántas maneras distintas pueden hacerlo? (consulten con sus compañeros)

(ii) Propongan una ecuación vectorial para esta recta.

b) Consigan que **GeoGebra** grafique una recta de dirección $(-2, 1, 3)$, que pase por el punto $(3, -4, 1)$.

(i) ¿De cuántas maneras distintas pueden hacerlo? ¿Pueden adaptar las que surgieron en el caso anterior?

(ii) Propongan una ecuación vectorial para esta recta.

Problema 7 Aprender a estudiar. Éste es un problema para resolver a lo largo de toda esta Unidad. Muchos de los problemas que aparecen aquí planteados, comienzan con una situación geométrica y desembocan en el planteo de un sistema de ecuaciones, es decir: varias ecuaciones con varias incógnitas.

Consigna: aparte de intentar resolver cada problema, construyan en una hoja aparte una lista ordenada de todos los sistemas de ecuaciones que vayan apareciendo a lo largo de la Unidad. Cada sistema de ecuaciones de la lista que armarán debe estar identificado con el número de problema. Esta lista servirá para retomar los sistemas cuando los estudiemos con más detalle en la Unidad siguiente.

Problema 8

a) Encuentren la ecuación vectorial de una recta que sea paralela a la que pasa por los puntos $(-1, 1)$ y $(3, 1)$, pero que pase por el punto $(0, 0)$.

b) Encuentren la ecuación vectorial de una recta que sea paralela a la que pasa por los puntos $(-1, 1, 2)$ y $(1, 3, 4)$, pero que pase por el punto $(0, 0, 0)$.

Problema 9

a) Encuentren el punto en el que se cruzan las rectas de ecuaciones

$$(x, y) = \lambda(2, 1) + (-1, 4)$$

y

$$(x, y) = k(2, -1) + (-1, -2)$$

b) Encuentren el punto en el que se cruzan las rectas de ecuaciones

$$(x, y, z) = \lambda(1, -2, 4) + (1, 1, 2)$$

y

$$(x, y, z) = k(1, 1, -5) + (-1, 2, 3)$$

Problema 10

a) ( ) Propongan las ecuaciones vectoriales y construyan el gráfico de dos rectas del plano $\mathbb{R}^2$ que no se crucen en ningún punto (cumplan estas dos consignas en el orden que consideren conveniente).

b) Propongan las ecuaciones vectoriales y construyan el gráfico en **GeoGebra** de dos rectas del espacio $\mathbb{R}^3$ que no se crucen en ningún punto (cumplan estas dos consignas en el orden que consideren conveniente).

Problema 11 ( ) Propongan las ecuaciones vectoriales y construyan el gráfico en **GeoGebra** de dos rectas del espacio $\mathbb{R}^3$ que no se crucen en ningún punto y no sean paralelas (cumplan estas dos consignas en el orden que consideren conveniente).

Planos

Problema 12 Recuerden el Problema 20, de la página 13. Supongamos ahora el mismo juego de Tiro al Blanco, pero con vectores en $\mathbb{R}^3$. Los tres vectores para disparar son:

$$\bar{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \bar{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{w} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

El punto al que se desea acertar es $A = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$. Si es posible acertarle, investiguen qué alcance se le debería dar a cada vector. Si es imposible, expliquen por qué.

Problema 13 Consideren otra vez la situación del problema anterior, pero ahora para apuntar se dispone solamente de los vectores

$$\bar{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \bar{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a) ¿Es posible acertar ahora al punto $A = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$?

b) Inventen dos puntos del espacio a los que seguro sea imposible acertarles con disparos en las direcciones de $\bar{u}$ y $\bar{v}$ y expliquen por qué es imposible.

c) Inventen dos puntos del espacio a los que seguro sea posible acertarles con disparos en las direcciones de $\bar{u}$ y $\bar{v}$ e indiquen qué alcance le darían a $\bar{u}$ y $\bar{v}$ para acertar el tiro.

d) Describan en palabras cómo caracterizarían a los puntos del espacio que pueden ser alcanzados con disparos en las direcciones de $\bar{u}$ y $\bar{v}$.

Problema 14 Decidan en cada caso si el vector $\bar{w}$ es combinación lineal de los vectores $\bar{u}$ y $\bar{v}$.

a) $\bar{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \bar{w} = \begin{pmatrix} -23 \\ 15 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) $\bar{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \bar{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

c) $\bar{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \bar{w} = \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

d) $\bar{u} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{v} = \begin{pmatrix} 5/2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \bar{w} = \begin{pmatrix} -11/2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

e) $\bar{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \bar{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \bar{w} = \begin{pmatrix} 7 \\ -7 \\ 7 \end{pmatrix}$

Problema 15 a) Propongan un vector perpendicular a $\bar{e_1} = (1,0,0)$. ¿Cuántos pueden encontrar? ¿Cómo los describirían geométricamente?

b) Propongan un vector perpendicular a $\bar{e_1} = (1,0,0)$ y también a $\bar{e_2} = (0,1,0)$. ¿Cuántos pueden encontrar? ¿Cómo los describirían geométricamente?

Problema 16 a) Propongan un vector perpendicular a $\bar{u} = (1,3,1)$. ¿Cuántos pueden encontrar? ¿Cómo los describirían geométricamente?

b) Propongan un vector perpendicular a $\bar{u} = (1,3,1)$ y también a $\bar{v} = (2,1,2)$. ¿Cuántos pueden encontrar? ¿Cómo los describirían geométricamente?

c) Interpreten el problema acompañándose de una construcción en **GeoGebra**.

Problema 17 Sea Π el plano de ecuación paramétrica

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

a) Propongan dos puntos que pertenezcan a Π y dos puntos que no pertenezcan.

b) Encuentren un vector que sea perpendicular a cualquier vector de Π.

Problema 18 Sea Π el plano de ecuación paramétrica

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

a) Propongan dos puntos que pertenezcan a Π y dos puntos que no pertenezcan.

b) Encuentren un vector que sea perpendicular a cualquier segmento contenido en Π.

Problema 19 Sean los vectores

$$\bar{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}, \quad \bar{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

Escriban las coordenadas de un vector que sea perpendicular a $\bar{u}$ y $\bar{v}$ simultáneamente.

Problema 20 Sea Π el plano de ecuación

$$\bar{X} = a \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix}$$

Decidan cuáles de los siguientes vectores son paralelos a Π:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \\ -2 \end{pmatrix} \quad v_2 = 2 \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} - 7 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} -7 \\ -10 \\ 15 \end{pmatrix} \quad v_4 = \begin{pmatrix} -7 \\ -10 \\ 4 \end{pmatrix} \quad v_5 = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix}$$

Problema 21 Encuentren una ecuación del plano perpendicular a $\bar{N}$ que pasa por P:

a) Si $\bar{N} = (1, 1, 1)$ y $P = (0, 1, 0)$.
b) Si $\bar{N} = (2, 1, 2)$ y $P = (2, 1, 2)$.
c) Si $\bar{N} = (1, 0, 1)$ y $P = (-1, 2, -3)$.

Problema 22

a) Encuentren una ecuación del plano Π que contiene a los ejes y y z.
b) Encuentren una ecuación del plano Π' que pasa por $(1, 2, 1)$ y es paralelo al plano Π del ítem anterior.

Problema 23 Dado $\Pi : x + y + z = 1$, hallen:

a) Una normal a Π.
b) Dos puntos distintos de Π.
c) Un plano Π_1 paralelo a Π que pase por el origen.
d) Un plano Π_2 paralelo a Π que pase por $(1, 1, 2)$.

Problema 24 Sea Π el plano que pasa por los puntos $(-1, 3, 5)$, $(2, -4, 0)$ y $(5, -1, 2)$.

a) Hallen una ecuación paramétrica para Π.
b) Hallen una ecuación implícita del plano Π.

Problema 25 Sea Π el plano de ecuación $3x - 2y + z = 6$. Hallen una ecuación paramétrica para Π.

Problema 26 Sea Π el plano de ecuación $x - 3y + 2z = 4$.

a) Escriban una ecuación de un plano que no tenga ningún punto en común con Π.

b) Escriban una ecuación de un plano cuya intersección con Π sea la recta de ecuación

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

c) Escriban una ecuación de la recta intersección entre el plano Π y el plano de ecuación $x - 3y + z = 4$.

d) Escriban una ecuación de una recta que no tenga ningún punto en común con Π.

e) Escriban una ecuación de una recta que tenga más de un punto en común con Π.

f) Encuentren el punto de intersección entre Π y la recta de ecuación

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Problema 27 Sea Π el plano de ecuación

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ -1/2 \\ 3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

a) Escriban una ecuación de un plano que no tenga ningún punto en común con Π.

b) Escriban una ecuación de un plano cuya intersección con Π sea la recta de ecuación

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1/2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

c) Escriban una ecuación de la recta intersección entre el plano Π y el plano de ecuación $2x - y + 3z = 1$.

d) Escriban una ecuación de una recta que no tenga ningún punto en común con Π.

e) Escriban una ecuación de una recta que tenga más de un punto en común con Π.

f) Encuentren el punto de intersección entre Π y la recta de ecuación

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1/3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Problema 28 Si $\mathbb{L} : \bar{X} = \alpha(1,1,3) + (0,1,1)$ y $A = (1,2,3)$

a) Hallen una ecuación del plano Π que contiene a $\mathbb{L}$ y al punto A.
b) Hallen una ecuación de la recta $\mathbb{L}'$ perpendicular a Π y que pasa por A.
c) Calculen $\mathbb{L} \cap \Pi$ y $\mathbb{L}' \cap \Pi$.

Problema 29 Sea $\Pi : x - y + 4z = 3$

a) Encuentren una ecuación de la recta $\mathbb{L}$, perpendicular a Π que pasa por $A = (1,1,1)$.
b) Hallen el punto Q que resulta ser la intersección de la recta $\mathbb{L}$ con el plano Π. Calculen $\|A - Q\|$.
c) ¿Cuánto vale $d(A, \Pi)$?

Problema 30

a) Decidan, en cada caso, si existe un plano que contenga a las rectas dadas. Si la respuesta es no, argumenten por qué y si la respuesta es afirmativa hallen una ecuación del plano.
   (i) $\mathbb{L} : \bar{X} = \lambda(1,2,0) + (1,1,1)$ y $\mathbb{L}' : \bar{X} = \alpha(-1,0,1) + (1,2,3)$
   (ii) $\mathbb{L} : \bar{X} = \alpha(1,2,-1) + (3,0,0)$ y $\mathbb{L}' : \bar{X} = \beta(-1,-2,1) + (1,2,3)$
   (iii) $\mathbb{L} : \bar{X} = \alpha(1,0,-3) + (2,1,1)$ y $\mathbb{L}' : \bar{X} = \beta(1,2,5) + (0,1,7)$
b) Sean $\mathbb{L} : \bar{X} = \lambda(1,2,0) + (1,1,1)$ y $\mathbb{L}' : \bar{X} = \alpha(-1,0,1) + (1,2,3)$, den una ecuación del plano Π que contiene a $\mathbb{L}$ y es paralelo a $\mathbb{L}'$.

Problema 31 Sean el plano $\Pi : 3x - y - z = 5$ y las rectas

$$\mathbb{L}_1 : \bar{X} = \lambda(2,1,1) + (-3,-3,-1)$$

y

$$\mathbb{L}_2 : \bar{X} = \beta(1,0,3) + (1,3,2)$$

a) Encuentren $P = \mathbb{L}_1 \cap \Pi$.
b) Hallen, si existe, una recta $\mathbb{L}$ que verifique simultáneamente: $\mathbb{L} \perp \mathbb{L}_1$, $\mathbb{L} \perp \mathbb{L}_2$ y $P \in \mathbb{L}$.

Problema 32 Sean $\Pi_1 : -2x + y + z = -1$ y $\Pi_2 : \bar{X} = \alpha\,(1,2,-1) + \beta\,(0,1,1) + (2,2,-3)$.

a) Prueben que $\Pi_1 \cap \Pi_2$ es una recta y hallen su ecuación paramétrica.
b) Sea $\mathbb{L}$ la recta del item anterior. Encuentren un punto P en la misma tal que $\|P\| = 1$,
c) Construyan una recta $\mathbb{L}'$ que sea perpendicular a $\mathbb{L}$ y que además $\mathbb{L}' \cap \Pi_1 = \emptyset$

Problema 33 Dadas las rectas

$$\mathbb{L} : \ \bar{X} = t(1,-1,2) + (0,1,3) \qquad \mathbb{L}_1 : \ \bar{X} = \lambda(1,1,0) + (1,5,9)$$

y los puntos $P = (1,0,1)$ y $Q = (3,0,0)$,

a) Hallen la ecuación implícita de un plano Π tal que $\mathbb{L} \perp \Pi$ y $P \in \Pi$.

b) Hallen la ecuación paramétrica de una recta $\mathbb{L}_2$ tal que $\mathbb{L}_2 \perp \mathbb{L}_1$, $\mathbb{L}_2 \subset \Pi$ y $Q \in \mathbb{L}_2$.

Distancias

Problema 34 Lean la siguiente explicación.

Ya sabemos que, en el plano, la diferencia de dos vectores $\bar{u}$ y $\bar{v}$ es un vector $\bar{u} - \bar{v}$ que puede representarse con origen en el origen de coordenadas, o bien con origen en $\bar{v}$ y extremo en $\bar{u}$. La Figura 2.7 muestra un ejemplo.

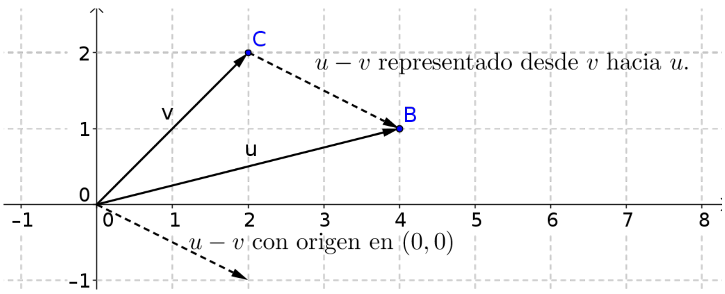


Figura 2.7: Resta de vectores

Por lo tanto, si pensamos a los vectores como puntos (en vez de pensarlos como flechas), podemos ver que la norma de la diferencia entre dos vectores mide la distancia entre sus extremos:

$$\|\bar{u} - \bar{v}\| = \text{Distancia } B, C$$

Los siguientes problemas permiten ver que esta idea se pueden trasladar de manera natural a vectores del espacio.

Problema 35 La Figura 2.8 muestra un cubo, en el que vamos a suponer que cada arista mide 2 cm. AE es una diagonal de una de las caras del cubo, mientras que AF es una diagonal del cubo.

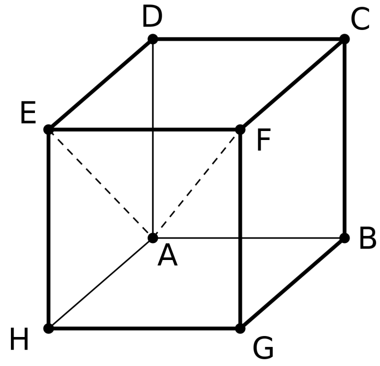


Figura 2.8: Cubo de arista 2 cm

El cubo se puede poner en un sistema de coordenadas de distintas maneras. Las Figuras 2.9, 2.10 y 2.11 muestran algunas posibilidades.

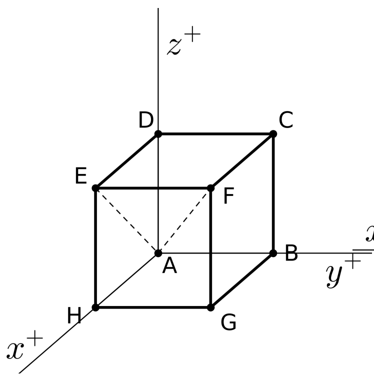


Figura 2.9: Posición 1

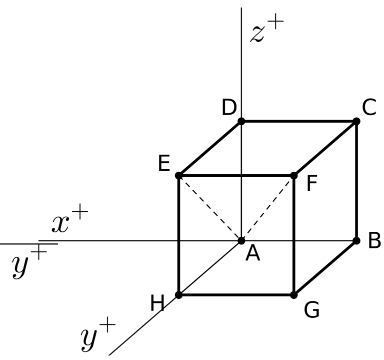


Figura 2.10: Posición 2

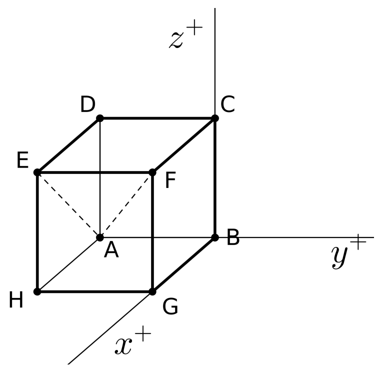


Figura 2.11: Posición 3

a) Completen las coordenadas de los vértices del cubo, según cada sistema de ejes.

Figura 2.9		Figura 2.10		Figura 2.11	
Vértices	Coordenadas	Vértices	Coordenadas	Vértices	Coordenadas
A		A		A	
B		B		B	
C		C		C	
D		D		D	
E		E		E	
F		F		F	
G		G		G	
H		H		H	

b) Elijan alguno de los tres juegos de coordenadas y utilícenlo para calcular las longitudes de las diagonales AE y AF. Comparen los resultados con los de alguien que haya utilizado otro de los sistemas de coordenadas.

c) Elijan alguno de los tres juegos de coordenadas distinto al que usaron en el punto anterior y utilícenlo para calcular:
   (i) El ángulo que forman la diagonal AE y la arista AH del cubo.
   (ii) El ángulo que forman la diagonal AF y la arista AH del cubo.
   (iii) El ángulo que forman la diagonal AE y la AF.

Problema 36 Ahora el cubo del Problema 35 se ha *estirado*, de manera que la arista AB mide el doble de la arista AD.

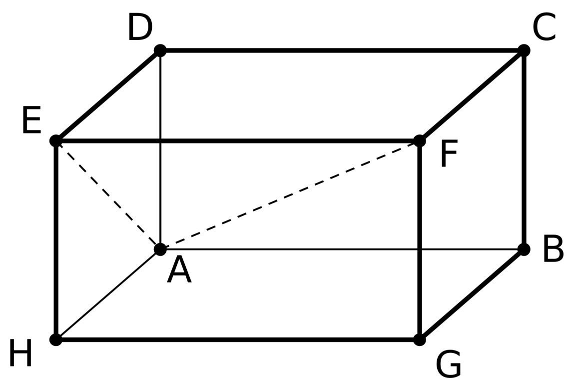


Figura 2.12: Cubo *estirado*.

a) ¿Cuál es ahora el ángulo entre las diagonales AE y la AF?
b) ¿Podrá *estirarse* la arista AB de modo que las diagonales AE y la AF queden perpendiculares? Si es posible, deduzcan cuánto debería medir AB. Si es imposible, expliquen por qué.

Problema 37 La base $ABGH$ del prisma que se ve en la Figura 2.13 es un cuadrado de 2 cm de lado. Su altura es de 3 cm. K es el punto medio entre H y G. El punto J es punto medio entre D y E. El punto L es el centro del rectángulo $BCFG$.

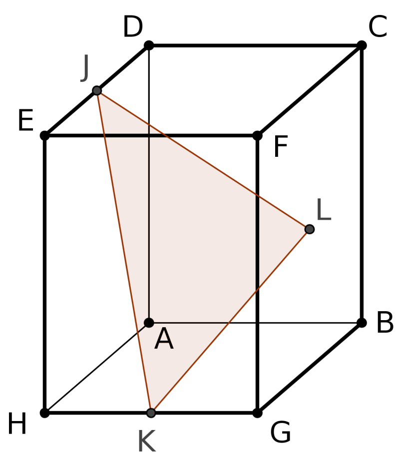


Figura 2.13: Cubo con triángulo.

Elijan coordenadas adecuadas y calculen:

a) Las medidas de los ángulos del triángulo JKL.

b) El perímetro de dicho triángulo.

Problema 38

a) Hallen la distancia entre $P = (2, 2, 1)$ y el plano que contiene a las rectas $\mathbb{L} : \bar{X} = \alpha(1, 2, -1) + (1, 3, 2)$ y $\mathbb{L}' : \bar{X} = \beta(2, -1, 3) + (3, 2, 5)$.

b) Hallen la distancia entre $P = (2, 1)$ y la recta $\mathbb{L} : x + 2y = 3$.

Ejercitación extra

(1) Se considera en $\mathbb{R}^2$ la recta de ecuación $L : y - 2x = 1$

a) Realicen su gráfico.

b) Determinen al menos dos puntos que pertencezcan a la recta.

c) Determinen una ecuación paramétrica de la recta, de dos formas diferentes.

d) Encuentren ecuaciones paramétricas de, al menos, tres rectas que sean paralelas a L.

(2) a) Encuentren una ecuación paramétrica de la recta L_1 que pasa por los puntos $A = (5, 1)$ y $B = (-3, 4)$. ¿Es única esa ecuación? Si consideran que no, encuentren otra. Si consideran que sí justifique por qué.

b) Encuentren una recta L_2 que sea perpendicular a L_1 y que pase por el punto $B = (-3, 4)$. ¿Es la única recta perpendicular a L_1? Si hay otras rectas perpendiculares a L_1, encuentren algunas e indiquen en qué punto la cortan. Si no las hay, expliquen por qué no.

c) Grafiquen algunas de las rectas encontradas en el ítem anterior.

(3) a) Encuentren una ecuación paramétrica de la recta L_3 que pasa por los puntos $A = (1, 0, 4)$ y $B = (2, -1, -2)$.

b) Encuentren una recta L_4 que sea perpendicular a L_3 y que pase por el punto $C = (4, -1, 6)$ ¿Es única?

c) ¿Es posible que dos rectas en $\mathbb{R}^3$ sean perpendiculares y que no se corten en ningún punto? Si es posible, den algunos ejemplos.

d) Encuentren una recta perpendicular a L_3 que pase por el punto $D = (3, -2, 2)$. ¿D pertenece a la recta L_3? ¿La recta que encontraron se interseca con L_3?

(4) a) Encuentren una ecuación paramétrica de una recta L_1 que pase por los puntos $A = (4, 5)$ y $B = (-1, 3)$.

b) Encuentren una ecuación paramétrica de una recta L_2 que sea perpendicular a L_1 y que, además, pase por el punto $C = (-3, 1)$.

c) Encuentren una ecuación paramétrica de la recta de ecuación $L_3 : y - 3x = 2$.

d) Grafiquen las tres rectas halladas en el mismo sistema de ejes cartesianos.

(5) a) Encuentren el valor $k \in \mathbb{R}$ tal que la recta L_4 que pasa por los puntos $D = (3, 1, -2)$ y $E = (2, -2, 3)$ contenga al punto $P = (5, 7, k)$.

b) Encuentren el valor de $a \in \mathbb{R}$ tal que la recta L_5 de ecuación

$$X = \lambda(a, 2, -1) + (1, -3, 2)$$

sea perpendicular a L_4.

(6) Dados los vectores $\bar{v} = (0, 3)$ y $\bar{w} = (-1, 0)$ y los puntos $P = (5, 3)$ y $Q = (-2, -1)$, ¿es posible hallar una combinación lineal de $\bar{v}$ y $\bar{w}$ que alcance al punto P? ¿y al punto Q?

(7) Dados los vectores $\bar{v} = (0, 3, 0)$ y $\bar{w} = (-1, 0, 0)$ y los puntos $P = (5, 3, 0)$ y $Q = (-2 - 1, 0)$:

a) ¿Es posible hallar una combinación lineal de $\bar{v}$ y $\bar{w}$ que alcance al punto P? ¿Y al punto Q?

b) ¿Es posible hallar una combinación lineal de $\bar{v}$ y $\bar{w}$ que alcance los puntos $R = (5, 3, 1)$, $T = (a, b, 1)$ y $S = (a, b, 0)$ donde a y b son números reales? Expliquen por qué en cada caso.

c) Propongan dos puntos C y D que no se puedan alcanzar mediante una combinación lineal de $\bar{v}$ y $\bar{w}$.

(8) Dados los vectores $\bar{v} = (1, 2, 3)$ y $\bar{w} = (-1, 2, 0)$:

a) ¿Es posible hallar una combinación lineal que genere los puntos $P = (0, 4, 3)$, $Q = (-\frac{1}{6}, \frac{5}{3}, 1)$, $T = (2, 3, 3)$?

b) De las coordenadas de un punto M que no pueda escribirse como combinación lineal de $\bar{v}$ y $\bar{w}$. ¿Porqué ocurre esto?

(9) Dados los vectores $\bar{u} = (1, -3)$ y $\bar{v} = (-2, 6)$, ¿es posible escribir al punto $P = (-1, 3)$ como combinación lineal de $\bar{u}$ y $\bar{v}$?¿Y al punto $(1, 6)$? ¿Porqué?

(10) Dados los vectores $\bar{u} = (1, -2, 3)$ y $\bar{v} = (-2, 4, -6)$, ¿es posible escribir al punto $(-1, 2, -3)$ como combinación lineal de $\bar{u}$ y $\bar{v}$?¿Y el punto $(9, 6, 4)$? ¿Porqué?

(11) Propongan un vector $\bar{v}$ para que exista una combinación lineal entre $\bar{u} = (2, -1, 3)$ y $\bar{v}$ que genere el punto $P = (1, 2, 5)$.

(12) Resuelvan cada situación planteada.

a) Encuentren la recta L_1 que pasa por los puntos $A = (2, 0, 3)$ y $B = (1, -2, 2)$ y una recta L_2 que sea perpendicular a L_1 que pase por el punto $C = (-5, 1, -3)$.

b) Encuentren nuna recta L_3 que sea paralela a L_1, cuyo vector director tenga sentido opuesto al vector director de L_1 y norma igual a 1. Además L_3 debe pasar por el punto $(1, 0, -4)$.

c) Encuentren una recta L_4 que forme un ángulo de $45°$ con L_1 ¿Es única? Justifiquen su respuesta.

GNU Octave

(O1) Lean el siguiente recuadro:

> Supongamos que queremos graficar una recta, digamos la recta L del ejercicio (1) de la ejercitación extra de esta unidad. Es decir, queremos graficar la recta de ecuación $y-2x=1$ o, equivalentemente, $y=2x+1$, en GNU Octave. Lo primero que debemos hacer es determinar qué valores podrá tomar la variable x. Para esto debemos ingresar lo siguiente:
>
> $$x = (\text{valor inicial} : \text{escala} : \text{valor final});$$
>
> Luego ingresaremos la ecuación de la recta,
>
> $$y = 2 * x + 1;$$
>
> Finalmente utilizaremos la función que nos permitirá realizar el gráfico, esto es, la funcion plot(). En este ejemplo nos quedaría:
>
> $$plot(x, y).$$

a) Realicen el gráfico de la recta del ítem anterior.

b) En términos algebraicos y de Octave, ¿qué es lo que estamos definiendo con la sentencia $x = (\text{valor inicial} : \text{escala} : \text{valor final})$?

(O2) Grafiquen las siguientes rectas en GNU Octave con los rangos de x determinados:

a) $y = 3x + 2$ con $x = (-1 : 0{,}1 : 15)$.

b) $y - 4x = -2$ con $x = (0 : 0{,}1 : 11)$.

c) $y + 4x = -1$ con $x = (0 : 0{,}1 : 10)$.

d) $y = 2x + 2$ con $x = (1 : 0{,}1 : 15)$.

e) $y = x + 1$ con $x = (-1 : 0{,}1 : 15)$.

f) $3y = x - 2$ con $x = (0 : 0{,}1 : 15)$.

g) $y = 4x - 5$ con $x = (-10 : 0{,}1 : 10)$.

h) $y = 7x - 12$ con $x = (0 : 0{,}1 : 20)$.

i) $y = x - \frac{3}{4}$ con $x = (-2 : 0{,}1 : 10)$.

Unidad 3: Sistemas de ecuaciones lineales y matrices

Contenidos: Problemas geométricos que desembocan en sistemas de ecuaciones lineales: intersección de dos o tres rectas, intersección de dos o tres planos. Problemas de modelización que desembocan en sistemas de ecuaciones lineales. Resolución por sustitución. Resolución por reducción a sistemas equivalentes. Matrices. Descripción matricial de los sistemas de ecuaciones. Operaciones entre matrices y operaciones elementales entre filas de una matriz. Resolución por el método de Gauss. Sintaxis para la escritura de matrices en **GeoGebra** u otro software que permita operar mediante el uso de herramientas de cálculo simbólico asistido por computadora. Utilización de comandos específicos. Producto de una matriz por un vector columna, como combinaciones lineales entre columnas de la matriz. Dependencia lineal y clasificación de sistemas: incompatibles, compatibles determinados e indeterminados. Determinantes. Casos 2x2 y 3x3. Relación entre determinantes y clasificación de los sistemas.

Objetivos de esta unidad.

- Plantear sistemas de ecuaciones lineales para resolver problemas geométricos: intersecciones entre planos y entre rectas.
- Comprender que un sistema de ecuaciones lineales puede tener una, ninguna o infinitas soluciones. Interpretarlo en forma geométrica y algebraica y ser capaz de crear ejemplos que ilustren los distintos casos.
- Interpretar las soluciones de los sistemas de ecuaciones lineales mediante construcciones en **GeoGebra**.
- Escribir y resolver sistemas de ecuaciones lineales en forma matricial, mediante reducción escalonada por filas (Gauss).

Sistemas de ecuaciones lineales

Intersección entre rectas.

Problema 1 ( )

a) Encuentren la ecuación paramétrica de la recta L_1 que pasa por los puntos $A = (3,1)$ y $B = (-1,4)$.

b) Grafiquen la recta encontrada y, en el mismo sistema de ejes, grafiquen la recta de ecuación paramétrica $L_2 : X = t\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$.

c) Utilicen las herramientas que ofrece **GeoGebra** para encontrar las coordenadas del punto en donde se intersecan las rectas L_1 y L_2.

d) Encuentren nuevamente el punto de intersección entre L_1 y L_2 pero esta vez a mano, sin utilizar **GeoGebra**. Comparen el resultado que obtuvieron con el obtenido mediante el uso del software.

e) Sea la recta $L_3 : X = \alpha\begin{pmatrix}\frac{12}{11}\\-\frac{9}{11}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\3\end{pmatrix}$. Estudien el problema de hallar la intersección entre L_3 y L_1. Expliquen sus conclusiones interpretando en forma gráfica y en forma analítica[3].

f) Propongan (dando una ecuación) alguna recta L_4 que no se corte en ningún punto con la recta L_1.

Problema 2 Dados los siguientes pares de rectas en $\mathbb{R}^2$, planteen, en cada caso, un sistema de ecuaciones lineales que les permita decidir si L_1 y L_2 se intersecan:

a) $L_1 : X = \alpha\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\-4\end{pmatrix}$ y $L_2 : X = \beta\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}$

b) $L_1 : X = \alpha\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ y $L_2 : X = \beta\begin{pmatrix}-2\\6\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$

c) $L_1 : X = \alpha\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ y $L_2 : X = \beta\begin{pmatrix}6\\9\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-2\\-5\end{pmatrix}$

Problema 3 Repitan el procedimiento llevado a cabo en el Problema 2 para las siguientes rectas en $\mathbb{R}^3$:

a) $L_1 : X = \alpha\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$ y $L_2 : X = \beta\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\2\\4\end{pmatrix}$

b) $L_1 : X = \alpha\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$ y $L_2 : X = \beta\begin{pmatrix}-2\\2\\3\end{pmatrix}$

[3] La solución gráfica es la que podemos obtener o aproximar, interpretando los gráficos de los objetos geométricos que estamos estudiando; la solución analítica es la que proviene de la modelización de estos objetos geométricos mediante ecuaciones.

c) $L_1 : X = \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $L_2 : X = \beta \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$

d) $L_1 : X = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ y $L_2 : \begin{cases} x - 2y + 3z = 0 \\ 2x - 2z = 3 \end{cases}$

Problema 4 Dados los problemas anteriores, respondan las siguientes preguntas:

a) ¿Cómo podrían caracterizar los distintos casos obtenidos cuando se trabaja con la intersección de rectas en $\mathbb{R}^2$? ¿Y en $\mathbb{R}^3$?

b) En $\mathbb{R}^3$ ¿Es necesario que dos rectas sean paralelas para que no se corten en ningún punto? ¿En qué otros casos podría ocurrir esto? ¿Y en $\mathbb{R}^2$?

c) ¿Pueden dar un ejemplo de dos rectas en $\mathbb{R}^3$ que no se corten?

Problema 5 Lean la siguiente explicación extraída del libro Notas de Álgebra Lineal ([6]):

Decimos que dos sistemas de ecuaciones lineales con n incógnitas son equivalentes si tienen el mismo conjunto de soluciones.

Para pasar de un sistema a otro equivalente podemos efectuar las siguientes operaciones sobre las ecuaciones del sistema:

(i) Intercambiar dos ecuaciones de lugar.
Por ejemplo,

$$\begin{cases} 2x + y = -1 \\ x - 3y = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x - 3y = 2 \\ 2x + y = -1 \end{cases}$$

los sistemas son equivalentes.

(ii) Multiplicar una ecuación por un número distinto de 0.
Por ejemplo,

$$\begin{cases} 2x + y = -1 \\ x - 3y = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x + y = -1 \\ 2x - 6y = 4 \end{cases}$$

son sistemas equivalentes.

(iii) Reemplazar una ecuación por la ecuación que obtenemos al sumarle un múltiplo de otra.
Por ejemplo, sumarle a la primera el triple de la segunda.

$$\begin{cases} 2x + y = -1 \\ x - 3y = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} 5x - 8y = 5 \\ x - 3y = 2 \end{cases}$$

son sistemas equivalentes.

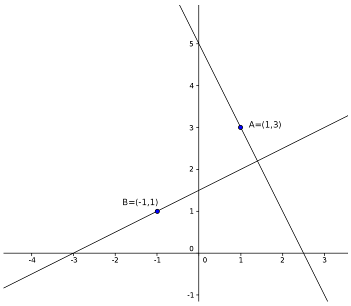
a) ¿Cuál es el número por el que multiplicamos a la segunda ecuación en el ejemplo (ii)?
b) ¿Qué operaciones tuvimos que realizar en el sistema de ecuaciones del ejemplo (iii) para obtener el sistema equivalente?
c) Ahora que han leído la explicación anterior vuelvan a resolver los problemas anteriores trabajando con sistemas equivalentes.

Problema 6 Decidan si $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ es solución del sistema:

$$\begin{cases} x + 4y = 14 \\ 5x + y = 13 \end{cases}$$

Problema 7 Dadas las siguientes rectas en el plano se pide:

a) Estimar las coordenadas del punto de intersección.
b) Plantear el sistema correspondiente y resolverlo.
c) Comparar ambas soluciones.



Problema 8 Encuentren, si es posible, la intersección de las rectas L_1, L_2 y L_3, planteando el sistema de ecuaciones lineales que consideren necesario.

a) $L_1 : X = \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$
b) $L_2 : X = \beta \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$
c) $L_3 : X = \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$

Problema 9 Encuentren, si es posible, la intersección de las rectas L_1, L_2 y L_3, planteando el sistema de ecuaciones lineales que considere necesario.

a) $L_1 : X = \alpha \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ \frac{8}{3} \end{pmatrix}$
b) $L_2 : X = \beta \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$
c) $L_3 : X = \lambda \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

Problema 10 Resuelvan los siguientes sistemas de ecuaciones lineales y clasifíquenlos según la cantidad de soluciones que hayan obtenido.

a) $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 4x + 3y = 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - y = 5 \\ 2x - 5y = 1 \end{cases}$

Intersección entre recta y plano.

Problema 11 Usando un sistema de ecuaciones, decida si las siguientes rectas se intersecan con los respectivos planos:

a) $L : X = \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $\Pi : 2x - 3y + z = 8$.

b) $L : X = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ y $\Pi : 4x + 2y - 3z = -3$.

c) $L : X = \alpha \begin{pmatrix} -8 \\ 2 \\ 11 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\Pi : 3x + y + 2z = 0$.

Interpreten cada una de las soluciones halladas en cada caso.

Problema 12

a) Calculen una ecuación implícita del plano Π que pasa por el origen y es perpendicular a la recta L que pasa por los puntos $(1, 1, 0)$ y $(0, -1, 2)$.

b) Encuentren el punto de intersección entre L y el plano Π.

Intersección entre planos.

Problema 13 Dados los planos Π_1, Π_2 y Π_3, encuentren, si es posible, la intersección entre ellos.

a) $$\begin{cases} \Pi_1 : X = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \\ \Pi_1 : X = \gamma \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ \Pi_1 : X = \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ -\frac{3}{2} \\ \frac{9}{2} \end{pmatrix} + \eta \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \end{cases}$$

b) $\begin{cases} \Pi_1 : X = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \Pi_1 : X = \gamma \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \\ \Pi_1 : X = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} + \eta \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \end{cases}$

Problema 14 Resuelvan los siguientes sistemas de ecuaciones lineales y clasifíquenlos según la cantidad de soluciones que hayan obtenido.

a) $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 3x + 3y + 2z = 7 \\ 2x - 4y + 3z = 8 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x - y + 2z = 6 \\ 3x + 2y - z = 4 \\ 4x + 3y - 3z = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ 2x - y + 2z = 4 \\ 3x + y + 3z = 9 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \Pi_1 : x + 3y - 4z = -16 \\ \Pi_2 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -12 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases}$

Otros contextos.

En esta sección de la guía de problemas estudiaremos los temas acompañándonos con el libro Matemática 7: Matrices[4]. En muchos de los enunciados de los problemas se hará referencia a explicaciones que encontrarán en este libro y –en varios casos– se remitirá directamente a los problemas del libro, para que los usen como práctica. Nos referiremos al libro como [1] (ver Bibliografía en página 126).

La lectura de libros de texto es toda una especialidad que como estudiantes universitarios tienen que ir practicando para llegar a dominar. Cuando uno comprende lo que lee accede a una autonomía que le permite estudiar y aprender por su propia cuenta. La lectura de libros de matemática es una especialidad dentro de esa especialidad. Los libros de matemática, además de texto, están poblados de simbología específica, que hay que aprender a interpretar. La organización de un libro de texto matemático también es especial. Por lo general no se trata de un libro que se lee de punta a punta, como una novela. A veces es más parecido a un diccionario: uno tiene que saber abrirlo en el lugar adecuado para resolver la consulta puntual que desea realizar.

Se espera que en esta práctica aprendan una variedad de recursos relacionados con resolver sistemas de ecuaciones lineales. Pero también se espera que tengan los primeros contactos con un texto matemático, que interactúen con él, que lo intenten comprender de distintas maneras y que comiencen a desplegar recursos

[4]Silvia Altman, Claudia Comparatore, Liliana Kurzrok, MATEMÁTICA 7: MATRICES, Editorial Longseller[1].

de lectura que les resultarán imprescindibles durante su carrera, como también durante su desempeño profesional.

Problema 15 Este problema está tomado de [1], página 35.

Consideren los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

a) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = a^2 - 1 \\ ax_2 + x_3 = a \\ x_1 + x_2 - ax_3 = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x_1 + ax_2 = a - 1 \\ -ax_1 - x_2 = 2a - 2 \end{cases}$

Hallen los valores de a para que cada sistema sea:

- Compatible determinado.
- Compatible indeterminado.
- Incompatible.

Problema 16 **Aprender a estudiar.**

a) Si no pudieron resolver el problema anterior, lean la solución explicada en el libro.

b) Para ver si comprendieron la explicación, resuelvan los problemas 32 y 33 que aparecen en los márgenes del libro [1], en las páginas 36 y 37, respectivamente.

c) En las páginas 38 a 46 del mismo libro hay una extensa variedad de ejercitación para aprender a resolver y clasificar sistemas de ecuaciones lineales. Resuelvan tantos como necesiten para sentir que manejan bien el tema y anoten ordenadamente las dudas que surjan, para llevarlas a la clase y consultar a sus profesores.

Problema 17 Este problema se compone de varios subproblemas que se pide analizar y resolver:

a) Juan pagó $8,50 por 2 bombones y 5 chicles. Pedro compró 3 bombones y 4 chicles y tuvo que pagar $11. ¿Cuál es el precio de cada bombón y de cada chicle?

b) Recuerden que al multiplicar un vector por un escalar, se obtiene otro vector en la misma dirección, como muestra la Figura 3.14 y que al sumar dos vectores se obtiene otro según la *regla del paralelogramo*, como muestra la Figura 3.15.

Dados los vectores $\bar{u}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\bar{u}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ y $\bar{w} = \begin{pmatrix} 8{,}5 \\ 11 \end{pmatrix}$, encuentren dos escalares λ_1 y λ_2 tales que

$$\lambda_1 \bar{u}_1 + \lambda_2 \bar{u}_2 = \bar{w}$$

Interpreten gráficamente, como en las figuras 3.14 y 3.15.

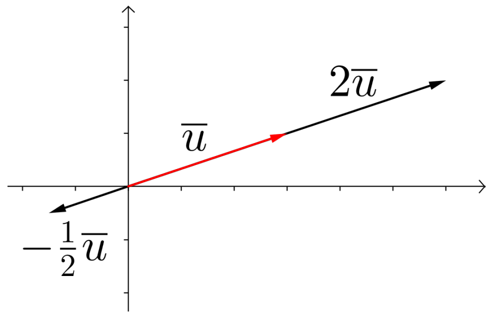


Figura 3.14: Producto de un vector por un escalar.

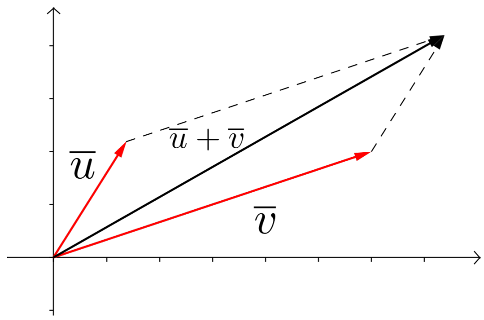


Figura 3.15: Suma de dos vectores.

c) Dadas las rectas de ecuaciones

$$y = -\frac{2}{5}x + \frac{17}{10}$$

$$y = -\frac{3}{4}x + \frac{11}{4}$$

encuentren el punto de intersección e interpreten geométricamente, graficando las rectas.

d) Dadas las rectas de ecuaciones vectoriales

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{2}{5} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{17}{10} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{3}{4} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{11}{4} \end{pmatrix}$$

encuentren el punto de intersección e interpreten geométricamente, graficando las rectas.

Problema 18 Este problema también se compone de varios subproblemas que se pide analizar y resolver:

a) (Problema 3 de la página 12 de [1], reproducimos aquí el enunciado) Ezequiel y Ariel fueron a la librería. Ezequiel compró dos lápices y una goma, y pagó \$4. Ariel compró cuatro de esos lápices y dos de esas gomas, y pagó \$8. ¿Cuál era el precio de cada goma y de cada lápiz?

b) Discutan en qué se parece y en qué se diferencia este problema del 17a).

c) ¿Cómo se escribiría este problema en forma parecida al Problema 17b)? Escríbanlo y resuélvanlo.

d) ¿Cómo se escribiría este problema en forma parecida al Problema 17c)? Escríbanlo y resuélvanlo.

e) ¿Cómo se escribiría este problema en forma parecida al Problema 17d)? Escríbanlo y resuélvanlo.

Problema 19 En la página 31 del libro [1] figura el siguiente problema. Resuélvanlo:

En un negocio hay triciclos, bicicletas y kartings. Se cuentan, en total, 161 ruedas y 104 pedales, y se sabe que la cantidad de bicicletas es tres cuartos de la de kartings. ¿Cuántos triciclos, bicicletas y kartings hay en ese negocio?

Problema 20 En la siguiente tabla se muestran tres sistemas de ecuaciones y distintas formas de escribirlos, representarlos o interpretarlos.

a) Completen los espacios vacíos de la tabla.

Sist. / Rep.	(I)	(II)	(III)
Sistema de ecuaciones		$\begin{cases} 2x - 3y + z = 5 \\ 4x + y - \frac{1}{3}z = 1 \end{cases}$	
Sistema matricial	$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$		
Matriz ampliada			
Combinaciones lineales			$x \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 16 \end{pmatrix}$
Interpretación geométrica			

b) Resuelvan cada sistema usando la representación que consideren más conveniente.

Matrices

Problema 21 (Este problema está basado en uno similar del libro [7]) Las siguientes matrices muestran la actuación de los 3 mejores equipos del campeonato durante la primera y la segunda mitad del año respectivamente.

	G	E	P
E_1	13	1	1
E_2	9	1	5
E_3	7	5	3

	G	E	P
E_1	11	3	0
E_2	12	1	1
E_3	8	2	4

Encuentren:

a) La matriz que muestre la actuación anual de los equipos.

b) La matriz que muestre el puntaje obtenido por cada equipo de forma semestral y anual si:

(i) se otorgan 2 puntos por partido ganado y 1 por partido empatado.

(ii) se otorgan 3 puntos por partido ganado y 1 por partido empatado.

Problema 22 Consideren las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Si saben cómo realizar las siguientes operaciones, resuélvanlas; si no saben cómo hacerlo pasen al Problema 23:

a) $A + B$

b) $B + C$

c) $C \cdot (A + C)$

d) $(A + B) \cdot (A + B)$

e) $B \cdot C$

f) $C \cdot B$

Problema 23 ( ) Una matriz como $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & \frac{1}{2} \\ 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ se ingresa en la **Barra de Entrada** de **GeoGebra** como

```
A={{2,-1,1/2},{3,5,4}}
```

Si no pudieron resolver el Problema 22, ingresen en **GeoGebra** las matrices de ese problema y obtengan los resultados. Si ya los pudieron calcular a mano, utilicen **GeoGebra** para verificar los resultados obtenidos.

Problema 24 el siguiente problema es una ligera adaptación del que figura en la página 60 del libro [1]. Resuélvanlo:

En cada uno de los siguientes casos calculen, si es posible, $A \cdot B$ y $B \cdot A$. Comparen los resultados obtenidos y escriban algún comentario acerca de los parecidos y las diferencias que encuentran entre el producto de matrices y el producto de números reales:

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & \frac{1}{2} \\ 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & \frac{1}{2} \\ 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{4} & 5 \\ 4 & 2 & 6 \\ 3 & 7 & 2 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$

d) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$

e) $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ \frac{3}{2} & \frac{15}{4} \\ \frac{2}{3} & \frac{5}{3} \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 5 & 10 & \frac{1}{2} & -1 \\ -2 & -4 & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$

Problema 25 Aprender a estudiar. En lo que sigue de esta sección de la guía es necesario que ejerciten el cálculo para aprender a operar con matrices. Pero también es necesario que interpreten los resultados para descubrir propiedades de las operaciones. Si cometen errores de cálculo no podrán apreciar esas propiedades. Para corregir estos posibles errores, utilicen **GeoGebra** como se indicó en el problema 23.

Problema 26 ¿Qué puede decir de los tamaños de las matrices A, B y C si se sabe que la operación matricial $A \cdot B \cdot (C + A) \cdot C$ está bien definida?

Problema 27 Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ Encuentren todas las matrices $P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tales que $A \cdot P = P \cdot A$.

Problema 28 Lean el siguiente recuadro:

Si A es una matriz de $n \times m$, se llama **matriz traspuesta de** A a la matriz A^t de $m \times n$ cuyas columnas son las filas de A.

Por ejemplo, dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

Se quiere encontrar la matriz traspuesta A^t. Dado que $A \in \mathbb{R}^{2x4}$, entonces su traspuesta $A^t \in \mathbb{R}^{4x2}$, pues para armar A^t escribimos las filas de A como columnas; entonces

$$A^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 0 \\ 4 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Sean A, B y C tres matrices tales que el producto $A \cdot B \cdot C$ es una matriz de 3×2 y el producto $A \cdot C^t$ es una matriz cuadrada. Calculen las dimensiones de A, B y C.

Problema 29 Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

¿Qué condiciones deben cumplir a,b y c para que se verifique $A \cdot B = B \cdot A$?

Problema 30 Para resolver el sistema $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 4 \\ 10 \end{smallmatrix}\right)$ mediante el proceso de eliminación gaussiana, se comienza restando a la segunda fila de la matriz del sistema el triple de la primera, con el fin de dejar un 0 bajo la diagonal de la matriz. La misma operación se efectúa en la columna solución $\left(\begin{smallmatrix} 4 \\ 10 \end{smallmatrix}\right)$, quedando el sistema equivalente

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} \tag{3.1}$$

Esta operación elemental entre filas de la matriz $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{smallmatrix}\right)$ se puede conseguir multiplicando la matriz del sistema desde la izquierda por otra matriz convenientemente elegida, a la que podemos llamar E. Es decir:

$$E \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

a) Encuentren la matriz E.

b) Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ y $b = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$, resuelvan el sistema $Ax = b$ calculando primero $E \cdot A \cdot x = E \cdot b$.

Comentario acerca de la escritura de los vectores: En algunos problemas de la guía hemos usado la escritura (x, y) o (x, y, z) para referirnos a vectores de $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$, respectivamente. Pero en casi todos los casos, se ha preferido la escritura $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ o $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. ¿A qué se debe esto?

Desde luego, ambas escrituras dan la misma información y sirven para describir puntos (o vectores) del plano y del espacio. Encima la escritura (x, y, z) tiene la ventaja de ocupar menos espacio, pues cabe en un renglón de la hoja y es cómoda para ingresar con el teclado en la computadora. **GeoGebra** la acepta y la utiliza tanto en el plano como en el espacio.

La desventaja que tiene la escritura (x, y, z) es que no permite operar correctamente con las reglas de la multiplicación de matrices. Una multiplicación como la de la ecuación (3.1) se puede efectuar. Pero $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot (x, y) = (4, -2)$ no tiene sentido, porque en una multiplicación el número de columnas de la primera matriz debe coincidir con el número de filas de la segunda.

A partir del momento en que comenzamos a manejar el cálculo matricial, hay que pensar que los vectores son matrices de una sola columna y es por eso que los escribimos como $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, aunque ocupen más lugar.

Una solución al problema del espacio en la hoja es aprovechar el concepto de matriz traspuesta (ver recuadro anterior) y, en vez de $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, escribir $(x\ y\ z)^t$. Usaremos este recurso fundamentalmente cuando sea necesario por razones de espacio.

Problema 31 a) Realicen en tres pasos operaciones elementales entre filas para triangular la matriz del sistema $Ax = b$, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

b) Encuentren, como en el problema anterior, tres matrices E_1, E_2 y E_3 que provoquen las operaciones entre filas, al calcular $E_3 \cdot (E_2 \cdot (E_1 \cdot A))$.

c) Transformen el sistema $Ax = b$ en el equivalente $E_3 \cdot (E_2 \cdot (E_1 \cdot A)) = E_3 \cdot (E_2 \cdot (E_1 \cdot b))$ y luego resuélvanlo.

d) Calculen $E = E_3 \cdot E_2 \cdot E_1$ ¿Qué sucede si luego calculan $E \cdot A$?

Problema 32 a) Construyan una matriz A (¿de qué tamaño debe ser?) que verifique

$$A \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

b) Lo mismo para

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Problema 33 Lean el siguiente recuadro:

> La matriz de $n \times n$ que tiene unos en la diagonal y ceros en las demás entradas se llama **matriz identidad**. Por ejemplo,
>
> $$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
>
> son las identidades de (2×2), (3×3) y (4×4), respectivamente.

a) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, utilicen las ideas del problema 31b) para encontrar una matriz E tal que $E \cdot A = I_2$.

b) Dada la matriz $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, utilicen las ideas del problema 31b) para encontrar una matriz E tal que $E \cdot B = I_3$.

c) Si $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ y $b = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ Utilicen la matriz E de la parte a) para resolver el sistema $Ax = b$, mediante el cálculo $E \cdot Ax = E \cdot b$.

d) Si $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $b = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ Utilicen la matriz E de la parte b) para resolver el sistema $Ax = b$, mediante el cálculo $E \cdot Ax = E \cdot b$.

Problema 34

a) Lean el siguiente recuadro:

> Sea $A \in \mathbb{R}^{nxn}$ una matriz. Decimos que es **inversible** o que tiene inversa si existe otra matriz, digamos B, tal que
>
> $$A \cdot B = B \cdot A = I$$

donde I es la matriz identidad. Si estas condiciones se dan decimos que B **es la matriz inversa de** A. Como se puede demostrar que esta matriz inversa de A es única, la notamos como A^{-1}.
Así, resulta $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$

b) Decidan si las siguientes matrices son inversibles, en caso afirmativo encuentren las inversas correspondientes.

(i) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ (ii) $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ (iii) $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Problema 35 Determinen los valores de c tales que la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & c+1 \\ 3 & c-4 \end{pmatrix}$$

no sea inversible.

Determinantes

Problema 36 Resuelvan en forma general cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones lineales

a) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) ¿Qué condición debe cumplirse sobre a, b, c y d para que los sistemas tengan solución?

d) Teniendo en cuenta la respuesta anterior, propongan una matriz $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ para que cada uno de los sistemas a) y b) tengan solución y otra matriz $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ para que no tengan solución.

Problema 37 a) Encuentren una expresión para la matriz A^{-1}, siendo $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. ¿Bajo qué condiciones existe esa matriz?

b) Para la matriz hallada, comprueben que $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

c) ¿Cuentan con un nuevo criterio para volver a pensar los problemas 34b)1 y 34b)2?

Problema 38 Lean el siguiente recuadro.

Dada la matriz cuadrada $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, llamamos determinante de A al número real

$$\det(A) = |A| = ad - bc$$

a) Calculen el determinante de cada una de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 9 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$$

b) Resuelvan cada uno de los siguientes sistemas e indiquen qué relación encuentran entre la solución y el ítem anterior:

$$Ax = \mathbb{O} \qquad Bx = \mathbb{O} \qquad Cx = \mathbb{O} \qquad Dx = \mathbb{O}$$

Problema 39

a) Inventen dos matrices distintas que tengan determinante igual a 5.
b) Inventen dos matrices distintas que tengan determinante igual a 1.
c) Inventen dos matrices distintas que tengan determinante igual a 0.
d) Inventen dos matrices A y B tales que $\det(A) \cdot \det(B) = 1$.

Problema 40 Aprender a estudiar. El concepto de determinante se extiende a matrices cuadradas de cualquier tamaño $n \times n$, en general. La teoría de los determinantes es extensa y puede presentarse y organizarse de muchas maneras distintas. Nosotros nos proponemos unos pocos objetivos abarcables, para que el estudio de los determinantes no nos desvíe demasiado del resto de la teoría que estamos desarrollando:

- Comprender la relación entre los determinantes y la clasificación de sistemas lineales de $n \times n$.
- Comprender la relación entre los determinantes y la existencia de una matriz inversa para otra matriz de $n \times n$ dada.
- Manejar un algoritmo para calcular determinantes.

Estos objetivos se pueden alcanzar leyendo la sección **2.4 Desarrollo por cofactores; regla de Cramer** del libro [2], que está entre sus páginas 97 y 109.

a) Recurran a la Biblioteca o al Campus para acceder a esas páginas del libro.
b) Formen grupos de estudio entre tres, cuatro o cinco compañeros y reúnanse a leer juntos el material. Recordamos que en matemática las lecturas se realizan con lápiz y papel, para ir escribiendo, resolviendo ejemplos y resolviendo los problemas que aparecen al final de la sección.
c) Anoten las dudas o los tramos de lectura que no consigan comprender, para preguntar a sus docentes.

Ejercitación extra

(1) a) ¿Cuánto deben valer a y b para que el sistema $\begin{cases} x+2y+z=a \\ x-y+bz=4 \end{cases}$ tenga como solución al punto $(4,-5,2)$?

b) Propongan tres planos Π_1, Π_2 y Π_3 de modo que $\Pi_1 \cap \Pi_2 \cap \Pi_3 = L$, donde L es la recta solución del item a).

(2) Sea $A = \begin{pmatrix} -1 & \alpha & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ \alpha & 0 & 4 \end{pmatrix}$

a) Determinen, si es posible, los valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ para los cuales el sistema $A \cdot x = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, tiene infinitas soluciones. Encuentren las soluciones del mismo.

b) Para $\alpha = -2$, determinen los valores de $\beta \in \mathbb{R}$ para los cuales el sistema $A \cdot x = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ \beta \end{pmatrix}$ no tiene solución.

(3) a) Sean las rectas L_1 y L_2 definidas por $L_1 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $L_2 : \begin{cases} 3x+z=4 \\ 2x+y=3 \end{cases}$ y sea Π el plano que contiene a L_1 y L_2. Decidan si $(2,-1,-2)$ pertenece al plano Π.

b) Encuentren la intersección entre L_1 y L_2.

(4) Dado el plano de ecuación $\Pi_1 : x+2y-z=1$

a) Den una ecuación de una recta L que esté contenida en él.

b) Den otra ecuación de la misma recta L dada en el ítem anterior.

c) Den una ecuación de otra recta distinta a L que esté contenida en π.

d) Encuentren un plano Π_2 que intersecte al plano Π_1 en la recta L.

(5) a) Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} a & 2 & 1 \\ 2 & -1 & b \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} a-1 & 3 \\ 1 & b+3 \end{pmatrix}$.

Encuentren los valores de a y b tales que $A \cdot B + C = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 9 & 2 \end{pmatrix}$

b) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} k & k & \frac{3}{2} \\ 4 & k & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ encuentren los valores de $k \in \mathbb{R}$ tales que el sistema $A \cdot X = b$, con $b = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, tenga solución única.

(6) a) Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} a & 1 & -3 \\ 2 & 0 & b \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Encuentren los valores de a y b tales que el producto $A \cdot B = \begin{pmatrix} 10 & -\frac{5}{2} & -7 \\ \frac{13}{2} & 3 & -3 \end{pmatrix}$

(7) Para las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

a) Teniendo en cuenta el tamaño de las matrices, ¿cuáles de las siguientes operaciones pueden realizarse?

(i) $A + B$
(ii) $B + C$
(iii) $C + D$
(iv) $B \cdot C$
(v) $C \cdot B$
(vi) $C \cdot B + A$
(vii) $C \cdot (B + A)$

b) Calculen $(C^t)^t$.

c) Calculen $(2D)^t$.

d) Calculen $(A \cdot B)^t$.

e) Calculen $E \cdot F$ ¿Qué se puede decir de E y F?

f) Calculen el determinante de las matrices C, D, E y F.

g) Calculen el determinante de $C \cdot D$.

h) Calculen el determinante de $(A \cdot B)^t$.

i) Calculen el determinante de $(2 \cdot D)^t$ usando propiedades.

(8) Propongan una matriz G que cumpla que $G^2 = \mathbb{O}$ y otra matriz H que cumpla que $H^2 = H$.

(9) Agreguen una fila a la matriz M para que se cumpla, si es posible, lo propuesto en cada caso.
$M = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

a) M sea inversible.

b) M no sea inversible.

c) El sistema $M \cdot x = T$ tenga solución única.

d) El sistema $M \cdot x = T$ tenga exactamente dos soluciones distintas.

e) El sistema $M \cdot x = T$ tenga infinitas soluciones para $T = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

f) El sistema $M \cdot X = T$ no tenga solución para $T = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

(10) Sean $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -4 \\ -3 & 2 & 1 \\ -4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

Realicen las siguientes operaciones: $A \cdot B$, $A + B \cdot C \cdot A$, $C \cdot B - B$, $(B + C) \cdot C$.

(11) Propongan dos matrices A y B de $\mathbb{R}^{2x2}$ que no sean nulas tales que el producto $A \cdot B$ sea la matriz nula.

(12) Decidan si las siguientes matrices son inversibles, en caso afirmativo encuentren las inversas correspondientes.

a) $A = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$ c) $B = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -2 & 1 \\ 0 & \frac{3}{4} & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$

(13) Escriban el sistema usando notación matricial:
$$\begin{cases} 2x - 5y + 3z - 8w = -2 \\ x + 3y - z - 4w = -6 \\ -x + 2y + z - 6w = 9 \end{cases}$$

(14) Consideren $b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ y $b_3 = \begin{pmatrix} 16 \\ 12 \\ -5 \end{pmatrix}$ y resuelvan los sistemas $A \cdot x = b_i$ en cada caso.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(15) Decidan de que tamaño es X y resuelvan $X = X \cdot A + B^t$ con $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -4 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$.

(16) a) Calculen el determinante de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 5 \\ 8 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 8 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix} \qquad G = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 8 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad H = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & -1 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

b) ¿Existe A^{-1}?

c) ¿Es cierto que $det(E + H) = det(E) + det(H)$?

(17) Encuentren todos los valores de k para que A resulte inversible:

a) $A = \begin{pmatrix} k & 1 \\ 4 & -k \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 0 & k+3 & -2 \\ k-2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

(18) Sea $\Pi : x + 4y + 2z = 1$ y $L : \begin{cases} 2x & +10y & +5z & = 5 \\ x & +8y & \beta^2 z & = 2\beta + 3 \end{cases}$

Encuentren $\beta \in \mathbb{R}$ tal que:

a) $L \cap \Pi$ es un punto

b) $L \cap \Pi =$ es el conjunto vacío.

(19) Sea $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

a) Comprueben que se verifica la igualdad $A^3 - I = \mathbb{O}$, con I la matriz identidad.

b) Calculen A^{13}.

c) Basándose en los apartados anteriores y sin recurrir al cálculo de inversas encuentren la matriz X que verifica la igualdad $A^2 \cdot X + I = A$.

(20) Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ y $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ calculen.

a) $A \cdot B$

b) A^{10}

c) B^{10}

(21) a) Comprueben que si A es una matriz cuadrada tal que $A^2 = 2 \cdot A - I$, donde I es la matriz identidad, entonces A es inversible. ¿Cuál es la expresión de A^{-1}?

b) Utilicen el punto anterior para calcular la inversa de la matriz.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

(22) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$

a) Calculen $A \cdot B$ y $B \cdot A$.

b) Comprueben que $(A+B)^2 = A^2 + B^2$.

c) ¿Qué condiciones deben cumplir dos matrices cualesquiera A y B para que resulte $(A+B)^2 = A^2 + B^2$?

(23) Calculen el determinante de las siguientes matrices:

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

b) $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$

c) $C = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & -3 \\ \frac{2}{3} & -2 & 1 \end{pmatrix}$

d) $D = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 4 & \frac{5}{4} \end{pmatrix}$

Unidad 4: Espacios vectoriales

Contenidos: Introducción a los espacios vectoriales, a partir del espacio nulo y el espacio columna de una matriz, en el contexto del estudio de soluciones de los sistemas de ecuaciones lineales. Identificación en este contexto de los axiomas que definen el concepto de espacio vectorial. Generalización y definición. Combinación lineal: conjuntos linealmente independientes o dependientes; sistemas de generadores. Base. Dimensión. Cambio de coordenadas. Operaciones con subespacios: intersección, unión, suma.

Objetivos de esta unidad.

- Describir en forma general los conjuntos de soluciones de distintos sistemas de ecuaciones lineales.
- Interpretar el conjunto de soluciones de un sistema lineal homogéneo como un espacio vectorial, es decir, como un conjunto de vectores que es cerrado para la suma y para el producto por un escalar.
- Describir el conjunto de soluciones de un sistema lineal homogéneo $n \times m$ a partir de un número finito de soluciones, mediante las nociones de base, generador y dependencia lineal.
- Extender las nociones anteriores al caso de los sistemas no homogéneos.
- Describir vectores de $\mathbb{R}^n$ en coordenadas de una base dada.

Sistemas de ecuaciones lineales y espacios vectoriales

Problema 1 Cada una de las siguientes figuras representa un plano en algún lugar del espacio $\mathbb{R}^3$.

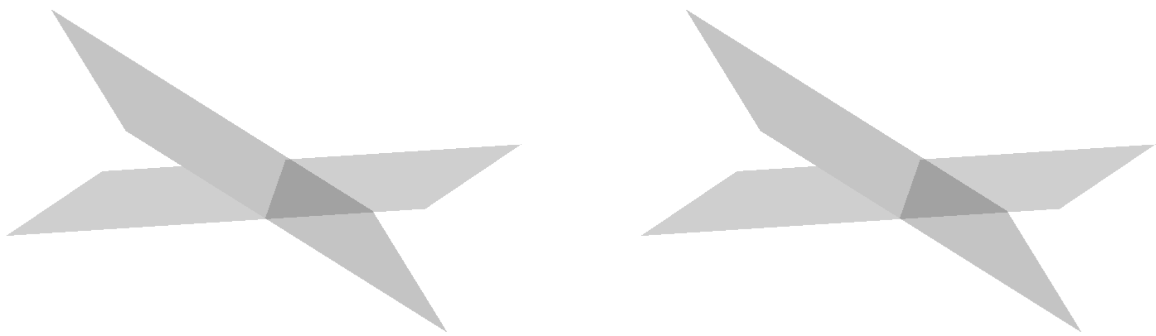
En el pizarrón del aula quedó escrita esta frase desde una clase anterior:

> *La suma de dos vectores cualesquiera cuyos extremos finales están en el plano siempre será un vector cuyo extremo final estará también en el plano.*

a) ¿Es posible ubicar los ejes cartesianos de manera que esta frase sea verdadera? Inténtenlo utilizando los planos dibujados (o dibujen otros, si necesitan hacer más ensayos) ¿De qué manera pueden justificar su respuesta?

b) ¿Es posible ubicarlos de manera que la frase sea falsa? ¿De qué manera pueden justificar su respuesta?

Problema 2 En esta variante del Problema 1 cambian las figuras y la frase del pizarrón.



En el pizarrón del aula quedó escrita esta frase desde una clase anterior:

La suma de dos vectores cualesquiera que estén en la intersección de los dos planos es un vector que también está en la intersección de los planos.

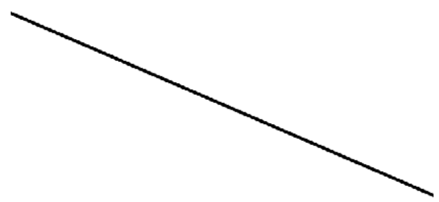
a) ¿Es posible ubicar los ejes cartesianos de manera que esta frase sea verdadera? Inténtenlo utilizando los planos dibujados (o dibujen otros, si necesitan hacer más ensayos) ¿De qué manera pueden justificar su respuesta?

b) ¿Es posible ubicarlos de manera que la frase sea falsa? ¿De qué manera pueden justificar su respuesta?

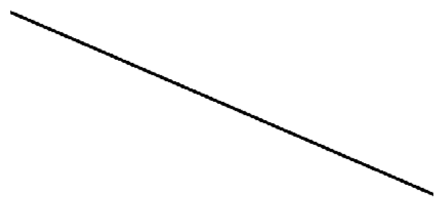
c) ¿Se parece la solución de este problema a la del anterior? Expliquen.

Problema 3

a) ¿Cómo sería otra variante del Problema 1 si la frase del pizarrón se refiere a esta recta en $\mathbb{R}^3$? Redacten la frase del pizarrón y resuelvan el problema.

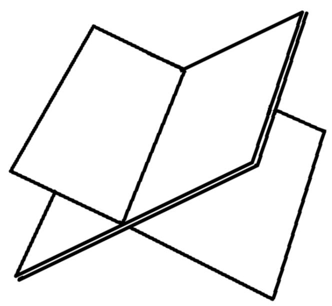


b) ¿Cómo sería si la recta está en $\mathbb{R}^2$?



Problema 4

a) Observen la siguiente figura que involucra a tres planos. Escriban posibles ecuaciones para ellos de manera que sea verdadera la frase: *La suma de dos vectores cualesquiera que estén en la intersección de los tres planos es un vector que también está en la intersección de los planos.*



b) Verifiquen la propiedad con dos puntos de la solución elegidos.

c) Demuestren la propiedad considerando puntos genéricos de la solución.

Problema 5 Definan el conjunto solución de cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones. ¿Cuál es su interpretación geométrica en cada caso? Grafíquenla con **GeoGebra**

a) $\begin{cases} x - y = 0 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - 2y = 0 \\ \frac{1}{2}x - y = 0 \end{cases}$

Problema 6 Definan el conjunto solución de cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones. ¿Cuál es su interpretación geométrica en cada caso? Grafíquenla con **GeoGebra**.

a) $\begin{cases} x - y - z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ -x + y - z = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - y - z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ -x + y + z = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - y - z = 0 \\ 2x - 2y - 2z = 0 \\ -x + y - z = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_1 + x_2 = x_3 \\ x_2 = x_3 - x_2 \end{cases}$

Problema 7 Lean el siguiente recuadro.

> Un sistema de ecuaciones lineales es **homogéneo** si los términos independientes de cada ecuación son 0 (ceros).
>
> Por ejemplo, un sistema homogéneo de 2×2 es $\begin{cases} x - y = 0 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$
>
> Su matriz de coeficientes asociada es $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$
>
> Entonces su expresión matricial es $A.x = \mathbb{O}$.
>
> Donde $x = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ y $\mathbb{O} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Consideren el sistema de ecuaciones homogéneo: $\begin{cases} x - y - 2z = 0 \\ 2x - 2y - 4z = 0 \\ -3x + 3y + 6z = 0 \end{cases}$

a) Encuentren, si es posible, tres puntos distintos que formen parte de la solución del sistema.

b) El vector nulo $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ¿es solución?

c) Clasifiquen el sistema.

Problema 8 ( ) Sea el sistema de ecuaciones del problema anterior. Consideren las siguientes soluciones, $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Analicen si los siguientes vectores son, o no, soluciones del sistema dado anteriormente:

a) $3 \cdot v_1$

b) $2 \cdot v_2$

c) $3 \cdot v_1 + 2 \cdot v_2$

d) $v_1 \cdot v_2$

e) $\alpha \cdot v_1$, con $\alpha \in \mathbb{R}$

f) $\beta \cdot v_2$, con $\beta \in \mathbb{R}$

g) $v_1 \times v_2$

h) $\alpha \cdot v_1 + \beta \cdot v_2$

Problema 9 Un sistema homogéneo de tres ecuaciones con tres incógnitas representa geométricamente la intersección de tres planos.

a) Indiquen cuál/es de las siguientes afirmaciones con respecto a la intersección de estos planos es correcta. La intersección puede ser:
   (i) un punto cualquiera del espacio.
   (ii) el punto $(0, 0, 0)$.
   (iii) una recta cualquiera.
   (iv) una recta que pasa por el origen.
   (v) un plano cualquiera.
   (vi) un plano que pasa por el origen.

b) Escriban sistemas de ecuaciones que cumplan con las afirmaciones que resultaran ser correctas en el ítem anterior.

Problema 10 ¿Existe algún sistema de ecuaciones lineales homogéneo que no tenga solución? ¿Por qué?

Problema 11 Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$. Consideren el sistema homogéneo $A.x = \mathbb{O}$.
Encuentren, si es posible, algún vector v y un número real λ tal que v sea solución del sistema, pero $\lambda.v$ no lo sea.
Viceversa, ¿es posible?

Problema 12 Si un vector v es solución de un sistema de ecuaciones lineales homogéneo, entonces $\lambda.v$ con λ real ¿también es solución? ¿Por qué?

Problema 13 Analicen si es verdadero, o no, el siguiente desarrollo matemático:
Si v_1 y v_2 son soluciones del sistema de ecuaciones $A.x = \mathbb{O}$ determinado por la matriz A entonces:

$$A.v_1 = \mathbb{O}$$
$$A.v_2 = \mathbb{O}$$

Multiplicamos la matriz A por el vector suma de los vectores solución:

$$A.(v_1 + v_2) = A.v_1 + A.v_2 = \mathbb{O} + \mathbb{O} = \mathbb{O}$$
$$A.(v_1 + v_2) = \mathbb{O}$$

Por lo tanto la suma de dos soluciones del sistema es también solución del mismo.

Dependencia lineal

Problema 14 Lean el siguiente cuadro:

Un vector v es **combinación lineal** de los vectores $u_1, u_2, ..., u_p$ o **depende linealmente** de ellos, si existen algunos números reales $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p$ que verifican:

$$v = \lambda_1.u_1 + \lambda_2.u_2 + ... + \lambda_p.u_p$$

Se dice que un conjunto de vectores $S = \{v_1, v_2, ..., v_p\}$ es **linealmente dependiente** (l.d.) si alguno de los vectores de S depende linealmente de los demás.

Den un conjunto formado por cuatro vectores de $\mathbb{R}^3$ que sean l.d.

Problema 15 ( )Consideren el plano Π de ecuación $X = \alpha(1,1,0) + \beta(-1,0,1)$. ¿Es posible encontrar un $P \in \Pi$ que no sea una combinación lineal de los vectores directores del plano?

Problema 16 Indiquen cuáles de los siguientes conjuntos de vectores son linealmente dependientes:

a) $A = \{(2,1);(1,1)\}$

b) $B = \{(2,1,0);(1,1,0)\}$

c) $C = \{(1,0,0);(1,1,0);(1,1,1)\}$

d) $D = \{(1,0,0);(0,1,0);(5,-3,2)\}$

e) $E = \{(2,1);(6,3)\}$

f) $F = \{(1,1,0);(1,1,1);(2,2,-1)\}$

g) $G = \{(1,0,0);(0,1,0);(0,0,1);(5,-3,2)\}$

h) $H = \{(x,y,z)/y = x - z\}$

Problema 17 ( )Sea el sistema de ecuaciones $A.x = \mathbb{O}$ definido por la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Encuentren un conjunto linealmente depediente de vectores que sea solución del sistema.

Problema 18 Encuentren, si es posible, un subconjunto linealmente dependiente con 3 vectores de cada conjunto solución del Problema 6.

Problema 19 Si conocemos la ecuación del plano Π: $2x + 4y - z = 0$, encuentren un conjunto de 2 vectores incluidos en el plano Π que no sea linealmente dependiente.

Problema 20 ¿Es posible conseguir en el Problema 19 un conjunto de 3 vectores que no sea linealmente dependiente? ¿Por qué?

Problema 21 Lean el siguiente recuadro:

> Un conjunto de vectores $S = \{v_1, v_2, ..., v_p\}$ es **linealmente independiente** si **ninguno** de los vectores de S depende linealmente de los demás vectores.
> Dicho en otras palabras, ningún vector del conjunto puede escribirse como combinación lineal de los demás vectores del conjunto.
> Dicho de una tercera manera: un conjunto de vectores es linealmente independiente si NO es linealmente dependiente.

Escriban,cuando sea posible, un conjunto A de vectores linealmente independiente (desde ahora l.i.) de $\mathbb{R}^2$ que, en cada caso, cumpla:

a) tenga un sólo vector.

b) tenga dos vectores.

c) tenga tres vectores.

Problema 22 Escriban,cuando sea posible, un conjunto A de vectores de $\mathbb{R}^3$ que, en cada caso, cumpla:

a) sea l.i. y contenga un sólo vector.

b) sea l.i. y contenga dos vectores.

c) sea l.i. y contenga tres vectores.

d) sea l.i. y contenga cuatro vectores.

Problema 23 Dadas las rectas $\mathbb{L}_1 : X = (\lambda, 2\lambda, \lambda)$ y $\mathbb{L}_2 : X = \alpha \cdot (-2, 0, 3)$, ¿cuál es el conjunto solución del sistema $\mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_2$?

Problema 24 El conjunto formado por los vectores directores de dos rectas alabeadas en $\mathbb{R}^3$, ¿puede ser un conjunto l.i.?¿por qué?

Problema 25 **Aprender a estudiar.**

En la página 211 del libro [8] aparece la siguiente definición de **conjunto linealmente independiente** y **conjunto linealmente dependiente**.

Definición. Sea $L = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ un conjunto no vacío de vectores.

a) Suponga que

$$\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_k \mathbf{v}_k = \mathbf{0}$$

implica que $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k = 0$. Se dice entonces que L es *linealmente independiente*.

b) Un conjunto que no es linealmente independiente se llama *linealmente dependiente*; análogamente, L es linealmente dependiente si y sólo si hay escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ no *todos* cero, tales que

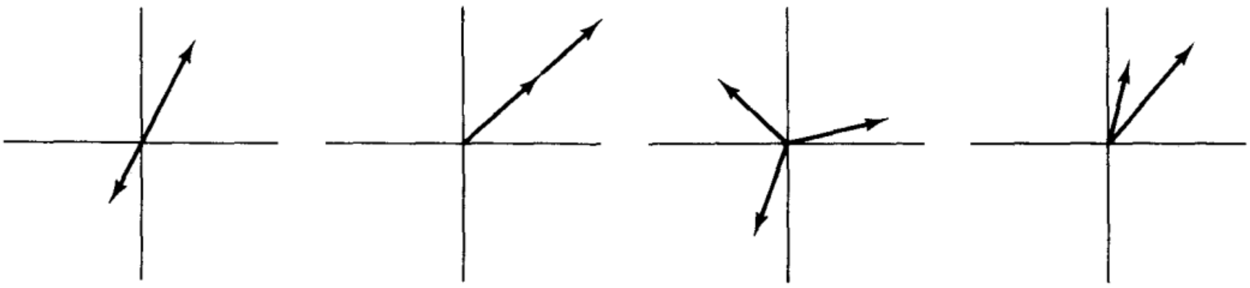
$$\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_k \mathbf{v}_k = \mathbf{0}.$$

a) Comparen la definición de **conjunto linealmente independiente** con la definición dada en el recuadro del Problema 21. Para hacer la comparación, elijan un conjunto de vectores l.i. que haya aparecido en los ejemplos anteriores y verifiquen que cumple con las dos definiciones.

b) Comparen la definición de **conjunto linealmente dependiente** con la definición dada en el recuadro del Problema 14. Para hacer la comparación, elijan un conjunto de vectores l.d. que haya aparecido en los ejemplos anteriores y verifiquen que cumple con las dos definiciones.

Problema 26 En la misma página 211 del libro [8] aparecen graficados los siguientes conjuntos de vectores de $\mathbb{R}^2$:

Ejemplo. Algunos conjuntos de vectores geométricos bidimensionales:



a) Indiquen debajo de cada gráfico si se trata de un conjunto l.d. o l.i. En el ejemplo del libro lo que aquí se pide como ejercicio de comprensión está a la vista del lector.

b) Dibujen ejemplos similares, que contemplen las distintas posibilidades de dependencia o independencia lineal, pero en $\mathbb{R}^3$.

Problema 27 ( ) Expliquen qué representa geométricamente cada conjunto.

a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x = 2y\}$

b) $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x = 2y\}$

c) $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / (x, y, z) = \lambda.(1, 2, 4)\}$

d) $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / (x, y, z) = \alpha.(3, 2, 5) + \beta.(0, 2, 1)\}$

e) $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 = 0\}$

Problema 28 ( )Indiquen si el conjunto de las combinaciones lineales del vector $v_1 = (1, -2)$ determina los mismos puntos del plano que determina la ecuación de la recta $y = -2x$.

Problema 29 Del conjunto $S = \{(x, y)/(x, y) = \lambda.(1, -2)\}$ ¿Pueden conseguir un conjunto de 2 vectores l.i.?; ¿y l.d.?

Problema 30 Para cada conjunto del Problema 27, definan un conjunto l.i. con la mayor cantidad de vectores posibles.

Espacios vectoriales.

Problema 31 Lean el siguiente cuadro.

Al conjunto de todas las combinaciones lineales formadas por los vectores del conjunto $\mathbb{S} = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ lo denominaremos **Espacio Vectorial, (E.V.)** generado por dichos vectores.
Al conjunto $\mathbb{S}$ se lo denomina **Sistema de Generadores** del espacio vectorial.[a]
Veamos algunos ejemplos:

I) El conjunto de vectores $\mathbb{S} = \{(1,1);(1,-1)\}$ *genera* el siguiente espacio vectorial $\{\alpha.(1,1) + \beta.(1,-1)\}$ con $\alpha \in \mathbb{R}$ y $\beta \in \mathbb{R}$.

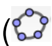
II) El espacio vectorial $\mathbb{V} = \{\alpha.(1,0,0) + \beta.(0,1,0) + \gamma.(0,0,1)\}$ con $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$ y $\gamma \in \mathbb{R}$ tiene como sistema de generadores, por ejemplo, al conjunto $\mathbb{S} = \{(1,0,0);(0,1,0);(0,0,1)\}$.

Importante: Es una parte central de esta teoría comprender la diferencia entre los conjuntos $\mathbb{V}$ y $\mathbb{S}$ de este último ejemplo: mientras que el espacio vectorial $\mathbb{V}$ tiene **infinitos** vectores (todos los que se van obteniendo con distintos valores reales de los escalares α, β y γ), el conjunto $\mathbb{S}$ tiene solamente tres vectores, que son los necesarios para poder generar todos los que están en $\mathbb{V}$.

[a] Más adelante veremos que no necesariamente es único.

a) Muestren de qué manera (para cuáles escalares α y β) los vectores del conjunto $\mathbb{S}$ del ejemplo I) generan al vector $(2,0)$.

b) Muestren de qué manera (para cuáles escalares α, β y γ) los vectores del conjunto $\mathbb{S}$ del ejemplo II) generan al vector $(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, -\frac{3}{4})$.

Problema 32 () Analicen si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas (propongan ejemplos que justifiquen la respuesta):

a) Todo espacio vectorial contiene al vector nulo.

b) Un conjunto l.d. no puede generar ningún espacio vectorial.

c) Todo conjunto de vectores l.i. genera un espacio vectorial.

d) La suma de dos vectores de un mismo espacio vectorial es otro vector del mismo espacio vectorial.

e) El sistema de generadores $A = \{(1,0);(0,1)\}$ genera el mismo espacio vectorial que el sistema $B = \{(1,0);(0,1);(2,3)\}$

f) El conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineal homogéneo es siempre un espacio vectorial.

Problema 33 Lean el siguiente cuadro:

> **Dos observaciones importantes**
>
> I) Como en un espacio vectorial están **todas** las combinaciones lineales de los vectores que lo generan, hay una en particular que es muy fácil determinarla, y es aquella que da por resultado al llamado **vector nulo** del espacio.
> Por ejemplo si multiplicamos cada uno de los vectores del sistema generador por 0 (ceros) obtenemos el vector nulo.
> En símbolos: $0.v_1 + 0.v_2 + 0.v_3 + ... + 0.v_n = (0,0,0,0...,0) = \mathbb{O}$
>
> II) Si dos vectores pertenecen al mismo espacio vectorial, entonces su suma también es un vector del espacio.
> Veamos la deducción para un sistema de generadores con dos vectores:
> Sea $\mathbb{V}$ el espacio vectorial generado por los vectores $\{v_1; v_2\}$, y sean $w_1 = \alpha_1.v_1 + \alpha_2.v_2$ y $w_2 = \beta_1.v_1 + \beta_2.v_2$ dos vectores cualesquiera del espacio, entonces la suma
>
> $$w_1 + w_2 = \alpha_1.v_1 + \alpha_2.v_2 + \beta_1.v_1 + \beta_2.v_2 = (\alpha_1 + \beta_1).v_1 + (\alpha_2 + \beta_2).v_2$$
>
> es también una combinación lineal de los vectores generadores y, por ende, pertenece al espacio vectorial.

Escriban una deducción similar a la que se muestra en la observación II), para justificar la siguiente afirmación:

Si un vector pertenece a un espacio vectorial entonces cualquier múltiplo escalar de él también pertenece al mismo espacio vectorial.

Problema 34 Indiquen cuáles de los siguientes conjuntos son espacios vectoriales.

a) $\mathbb{R}$
b) $\mathbb{R}^2$
c) $\mathbb{R}^3$
d) $\mathbb{R}^5$
e) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / (x,y,z) = t.(3,2,1)$ con $t \in \mathbb{R}\}$
f) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / (x,y,z) = t.(3,2,1) + (1,1,1)$ con $t \in \mathbb{R}\}$
g) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / (x,y,z) = t.(3,2,1) + q.(1,1,1)$ con $t, q \in \mathbb{R}\}$
h) Los $X \in \mathbb{R}^3$ tales que sean solución de del sistema de ecuaciones $A.X = \mathbb{O}$ con $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \\ -3 & 3 & -6 \end{pmatrix}$

Problema 35 Definan un sistema de generadores para los siguientes espacios vectoriales:

a) $\mathbb{R}$

b) $\mathbb{R}^2$

c) $\mathbb{R}^3$

d) $\mathbb{R}^5$

e) $\{(0,0)\}$

f) $\{(0,0,0)\}$

g) $\{(x,y) = (3t, 2t)$ con $t \in \mathbb{R}\}$

h) $\{(x,y,z) = (3t, 2t, t)$ con $t \in \mathbb{R}\}$

i) $\{(x,y,z,w) = (3t, 2t, t, -t)$ con $t \in \mathbb{R}\}$

j) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + z = 0\}$

Problema 36 Para los conjuntos $a), b), c)$ y $h)$ del Problema 35, escriban un sistema de generadores distinto al propuesto.

Problema 37 () Expliquen por qué los siguientes conjuntos no son espacios vectoriales:

a) $A = \{(x,y) = (3,2) + t.(1,0)$ con $t \in \mathbb{R}\}$

b) $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y = x + 1\}$

c) $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x - y + z = 3\}$

d) $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 - y^2 = 0\}$

e) El conjunto solución del sistema $A.X = b$, con $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$

Bases y dimensión

Problema 38 Recuerden el Problema 12, de la página 31. Las figuras 4.16 y 4.17 muestran dos representaciones del mismo problema. La primera es el problema de elegir el alcance de los vectores $\bar{u}$ y $\bar{v}$ para acertar al punto $(-4,1)$ en el juego del tiro al blanco. La segunda es el problema de construir el vector $\bar{w}$ como combinación lineal de los vectores $\bar{u}$ y $\bar{v}$.

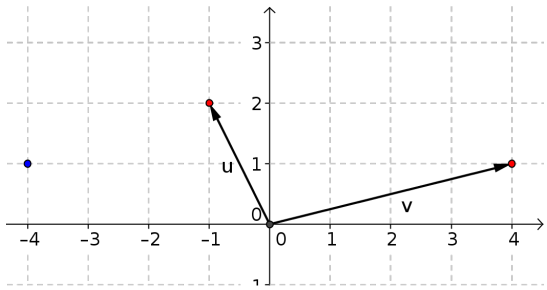


Figura 4.16: $\bar{w} = (-4, 1)$ representado geométricamente como un punto.

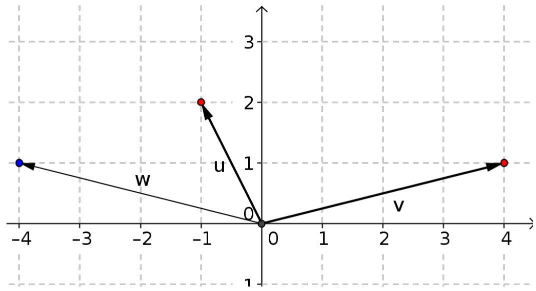


Figura 4.17: $\bar{w} = (-4, 1)$ representado geométricamente como un vector flecha.

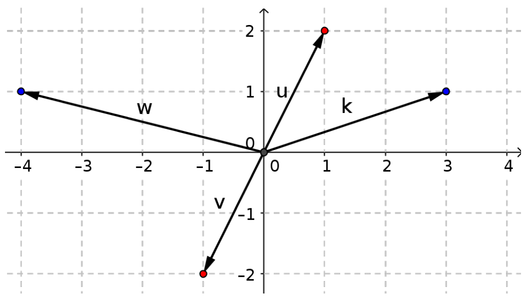
a) Escriban $\bar{w}$ como combinación lineal de los vectores $\bar{u}$ y $\bar{v}$, es decir, encuentren λ_1 y λ_2 reales tales que $\bar{w} = \lambda_1 \bar{u} + \lambda_2 \bar{v}$.

b) Consideren los mismos vectores $\bar{u}$ y $\bar{v}$ del ítem anterior. Escriban como combinación lineal de $\bar{u}$ y $\bar{v}$ un vector genérico $\bar{w} = (a, b)$.

c) Escriban $\bar{w}$ como combinación lineal de los vectores $\bar{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\bar{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, es decir, encuentren λ_1 y λ_2 reales tales que $\bar{w} = \lambda_1 \bar{u} + \lambda_2 \bar{v}$.

d) Consideren los mismos vectores $\bar{e_1}$ y $\bar{e_2}$ del ítem anterior. Escriban como combinación lineal de $\bar{e_1}$ y $\bar{e_2}$ un vector genérico $\bar{w} = (a, b)$.

Problema 39 Observen la figura y, como en el Problema 38, escriban $\bar{w}$ como combinación lineal de los vectores $\bar{u}$, $\bar{v}$ y $\bar{k}$.



Problema 40 Observen el siguiente gráfico. Luego contesten:

a) ¿Cuáles son las coordenadas del vector v?

b) El conjunto $A = \{u_1; u_2\}$ ¿es l.i?

c) El conjunto $B = \{v_1; v_2\}$ ¿es l.i?

d) El conjunto $C = \{v_1; v_2; v\}$ ¿es l.i?

e) Escriban la combinación lineal de los vectores del conjunto A que permite obtener v.

f) Escriban la combinación lineal de los vectores del conjunto B que permite obtener v.

g) Se define el conjunto $C = \{u_1; u_2; v_1; v_2\}$. Este conjunto ¿es l.i.?¿es posible escribir una combinación lineal y obtener el vector v? ¿es única?

Problema 41 Lean el siguiente recuadro:

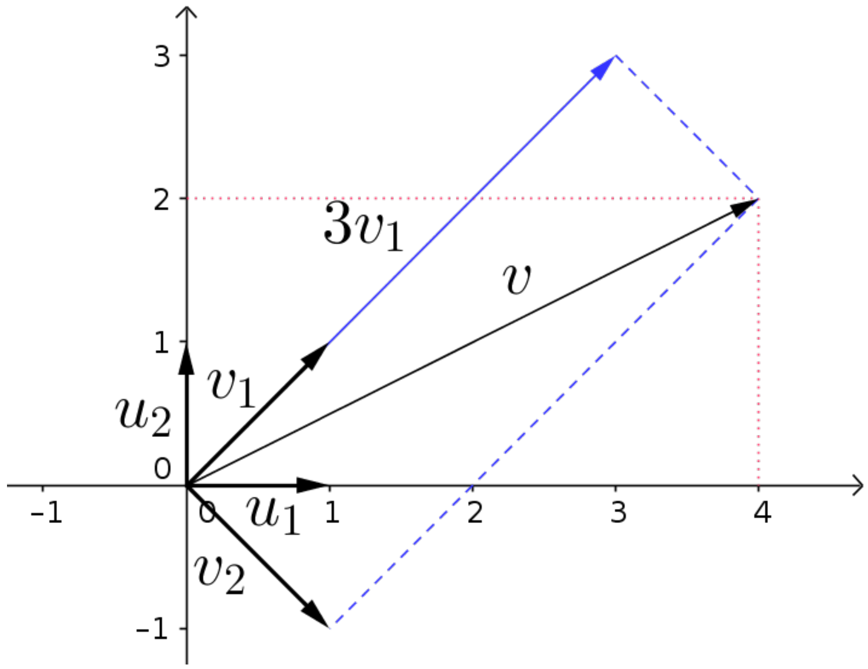


Figura 4.18: Vectores $v_1 = (1, 1)$; $v_2 = (1, -1)$; $u_1 = (1, 0)$ y $u_2 = (0, 1)$

Si un conjunto de vectores, dados en un cierto orden, es linealmente independiente, los vectores del espacio vectorial que generan se pueden escribir de una única manera como combinación lineal de ellos. Un sistema de vectores generadores de un espacio vectorial, linealmente independientes y dados en un cierto orden es una **base** del espacio vectorial.

Expliquen el recuadro anterior utilizando como ejemplos los que hayan encontrado en los problemas 38, 39 y 40.

Problema 42 Encuentren dos bases distintas para cada uno de los siguientes espacios vectoriales.

a) El espacio de soluciones del sistema homogéneo $Ax = \mathbb{O}$, con $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$.

b) Ídem, con $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$.

c) Ídem, con $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

d) El espacio generado por los vectores b para los que resulta compatible el sistema $Ax = b$ con $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$.

e) Ídem, con $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$.

f) Ídem, con $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Problema 43 ( ) Construyan un archivo de **GeoGebra** que se comporte de la siguiente manera:

En la Vista Gráfica 2D, hay tres vectores u, v y w con origen en $(0,0)$ que el usuario puede modificar arrastrando sus extremos.
Hay un cuadro de texto en la vista gráfica que dice:

$$\boxed{\begin{array}{l} \lambda_1 = \\ \lambda_2 = \end{array}}$$

Los valores de λ_1 y λ_2 que aparecen en el cuadro de texto son los escalares tales que

$$\bar{w} = \lambda_1 \bar{u} + \lambda_2 \bar{v}$$

y **GeoGebra** los modifica dinámicamente cuando el usuario mueve cualquiera de los tres vectores.

Problema 44 ( ) Lean el siguiente recuadro:

Si $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ es base de un espacio vetorial $\mathbb{V}$ y, para cierto $u \in \mathbb{V}$ y ciertos escalares $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ resulta

$$u = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_r v_r$$

decimos que $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \cdots \\ \lambda_r \end{pmatrix}$ son las **coordenadas de u respecto de la base $\mathcal{B}$** y escribimos:

$$C_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \cdots \\ \lambda_r \end{pmatrix}$$

Utilicen el archivo de **GeoGebra** del Problema 43 para responder las siguientes preguntas:

a) ¿Cuáles son las coordenadas de $u = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ respecto de la base $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$?

b) ¿Cuáles son las coordenadas de $u = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ respecto de la base $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$?

c) ¿Cuáles son las coordenadas de $u = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ respecto de la base $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$?

d) ¿Cuáles son las coordenadas de $u = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ respecto de la base $\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 237 \\ -18 \end{pmatrix} \right\}$?

e) Encuentren una base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$ tal que $C_{\mathcal{B}} \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. ¿Existe?, ¿Es única?

f) Encuentren una base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$ tal que $C_{\mathcal{B}} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $C_{\mathcal{B}} \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$. ¿Existe? ¿Es única?

g) Encuentren una base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$ tal que $C_{\mathcal{B}} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $C_{\mathcal{B}} \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$. ¿Existe? ¿Es única?

h) Encuentren una base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$ tal que $C_{\mathcal{B}} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $C_{\mathcal{B}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. ¿Existe? ¿Es única?

Problema 45 ( ) Adapten el Problema 43 a $\mathbb{R}^3$.

Ejercitación extra

(1) a) Encuentren una base del espacio vectorial que se obtiene al intersecar los planos generados por los conjuntos

$$S_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{y}$$

$$S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

b) Encuentren la ecuación de la recta que pasa por los puntos $P = (1, 2)$ y $Q = (-3, 2)$ en base B, donde $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$ ¿Es esta recta un espacio vectorial? ¿Por qué?

(2) a) Los siguientes conjuntos son espacios vectoriales. Justifiquen por qué.

(i) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y) = t(2, -1) + (4, -2)\}$

(ii) $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y, z) = \alpha(1, 1, 0) + \beta(5, 2, 1) + (4, 1, 1)\}$

(iii) C, el conjunto generado por $S = \{(2, 3, 0), (1, 1, 1), (5, 0, 2), (1, 0, -1)\}$.

(iv) D, el conjunto generado por $S = \{(1, 2, 3, 0)\}$.

(v) E, el conjunto generado por $S = \{(0, 0, 1), (3, 2, 1)\}$.

b) Para cada conjunto del ítem anterior, decidan qué dimensión tienen los espacios generados.

c) Encuentren una base para cada espacio generado y propongan una base distinta que genere los mismos espacios.

(3) Sean las rectas definidas por

$L_1 : (x, y) = \lambda(2, 1) + (1, 3)$,

$L_2 : (x, y) = \lambda_2(2, 1) + (4, 2)$ y

$L_3 : (x, y) = \lambda_3(2, 1)$.

Sabemos que $L_1, L_2, L_3 \subseteq \mathbb{R}^2$ y que $\mathbb{R}^2$ es un espacio vectorial. Sin embargo, alguna de las rectas dadas no es un espacio vectorial. Expliquen por qué.

(4) El plano Π de ecuación $x + 2y - z = 0$ es un espacio vectorial contenido en $\mathbb{R}^3$.

a) Verifiquen que efectivamente lo es.

b) Propongan una recta $L_1 \subset \Pi$ que no sea un espacio vectorial.

c) Propongan una recta $L_2 \subset \Pi$ que sea un espacio vectorial.

(5) Muestren con algunos ejemplos que $\mathbb{R}^3$ cumple todas las propiedades de los espacios vectoriales.

(6) Sea el plano Π de ecuación $-x + 2y + z = 3$. Muestren que el conjunto formado por los puntos contenidos en Π cumple con alguna de las propiedades de los espacios vectoriales ¿Cuáles no cumple? ¿Es un espacio vectorial?

(7) Encuentren los valores de k para los cuales $\left\{ \begin{pmatrix} k \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1+k \\ 1 \\ k \end{pmatrix} \right\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$.

(8) a) Encuentren una base y la dimensión del espacio vectorial generado por los vectores $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

b) Encuentren el valor de k para que el vector $u = \begin{pmatrix} k \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ esté contenido en el espacio vectorial del ítem anterior.

c) Encuentren las coordenadas de los siguientes vectores en la base hallada en el item a):

(i) $u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ (iii) $u_3 = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix}$ (v) $u_5 = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

(ii) $u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ (iv) $u_4 = \begin{pmatrix} \frac{7}{2} \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (vi) $u_6 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

(9) Sean $S = \{\alpha(1,2,1) + \beta(0,1,2) \in \mathbb{R}^3 : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ y $S' = \{\lambda(1,0,0) + \gamma(0,1,0) \in \mathbb{R}^3 : \lambda, \gamma \in \mathbb{R}\}$.

a) Encuentren una base de $S \cap S'$.

b) Propongan un conjunto generador para $S \cap S'$ que no sea una base.

(10) Sea la base $B = \{(1,2),(0,3)\}$

a) ¿Cuál es el espacio generado por B?

b) ¿Se puede encontrar un subconjunto de B que genere la recta $L : (x,y) = t(1,2) + (0,3)$? ¿Por qué?

c) ¿Genera el vector $(-3,5)$?

d) ¿Genera el vector $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a, b \in \mathbb{R}$?

(11) Determinen si los siguientes vectores generan $\mathbb{R}^3$:

a) $v_1 = (1,1,2)$,$v_2 = (1,0,1)$,$v_3 = (2,1,3)$

b) $v_1 = (1,1,1)$,$v_2 = (2,2,0)$,$v_3 = (3,0,0)$

c) $v_1 = (2,-1,3)$,$v_2 = (4,1,2)$,$v_3 = (8,-1,8)$

d) $v_1 = (3,1,4)$,$v_2 = (2,-3,5)$,$v_3 = (5,-2,9)$,$v_4 = (1,4,-1)$

e) $v_1 = (1,3,3)$,$v_2 = (1,3,4)$,$v_3 = (1,4,3)$,$v_4 = (6,2,1)$

(12) Encuentren una ecuación para el plano generado por el conjunto $S = \{(1,1,-1),(2,3,5)\}$ y encuentren una recta contenida en el mismo, generada por un subconjunto de S.

(13) Decidan cuáles de los siguientes conjuntos representan una base de $\mathbb{R}^3$:

a) $B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$

b) $B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

c) $B_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$

(14) Para el o los conjuntos que resulten ser base de $\mathbb{R}^3$ en el ítem anterior escriban las coordenadas de los siguientes vectores en esas bases:

a) $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

b) $v_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

c) $v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

d) $v_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

e) $v_5 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

f) $v_6 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

(15) Sea S el espacio generado por el conjunto $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

a) Mostrá que S es un espacio vectorial.

b) Hallá una base para S.

(16) Sea S el espacio generado por el conjunto $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix} \right\}$.

a) Encontrá una base B de S e identificá que representa geométricamente.

b) Encontrá el valor de $k \in \mathbb{R}$ tal que $\begin{pmatrix} -\frac{1}{12} \\ \frac{2}{3} \\ k \end{pmatrix}$ pertenezca a S.

(17) Sea K el espacio vectorial generado por el conjunto $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

a) Encuentre una base de K y encontrá las coordenadas del vector $\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$ en la base hallada.

b) Sea $\bar{v}$ un vector de $\mathbb{R}^3$, si se sabe que sus coordenadas en la base $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$. Encontrá las coordenadas de $\bar{v}$ en base canónica.

Unidad 5: Transformaciones lineales

Contenidos: Matrices y transformaciones del plano. Simetrías, rotaciones y homotecias en $\mathbb{R}^2$. Linealidad de estas transformaciones. Construcción de ejemplos en **GeoGebra** estableciendo correlaciones entre lo geométrico y lo analítico-simbólico. Definición de transformación lineal. Concepto, propiedades. Teorema fundamental. Núcleo e imagen. Clasificación. Representación matricial y fórmulas de las transformaciones lineales. Álgebra de las transformaciones lineales. Composición. Geometría de las transformaciones lineales de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$: representaciones gráficas. Matriz de una transformación lineal respecto de distintas bases de los espacios de salida y llegada.

Objetivos de esta unidad.

- Conocer e interpretar los movimientos del plano como ejemplos de transformaciones lineales de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$.
- En la ecuación matricial $Ax = b$, interpretar como un espacio vectorial el conjunto de posibles valores de b para los que el sistema resulta compatible.
- Identificar la ecuación matricial $Ax = b$ con las nociones de Dominio, Núcleo e Imagen de la transformación lineal $T(x) = Ax$.
- Describir los movimientos del plano mediante ecuaciones matriciales y mediante los recursos gráficos de **GeoGebra**, leyendo adecuadamente la información, según se expresa en cada contexto.
- Identificar los cambios de coordenadas como ejemplos de transformaciones lineales (automorfismos) y escribir matrices asociadas a una transformación lineal respecto de distintas bases, para transformaciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$.

Transformaciones lineales: movimientos en el plano

Los problemas que vienen a continuación tienen por objetivo introducir algunas ideas geométricas que nos van a servir como modelo para visualizar los objetos matemáticos que conoceremos en esta parte de la unidad.

Problema 1 Si dibujamos una letra con tinta fresca en una hoja y la plegamos por una recta, la letra queda estampada en la otra mitad de la hoja, como muestra la Figura 5.19. Se dice que la imagen estampada es la simétrica de la original, respecto de la recta.

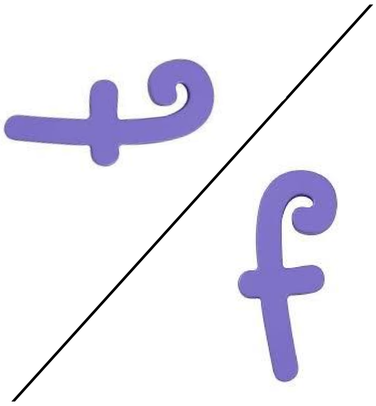
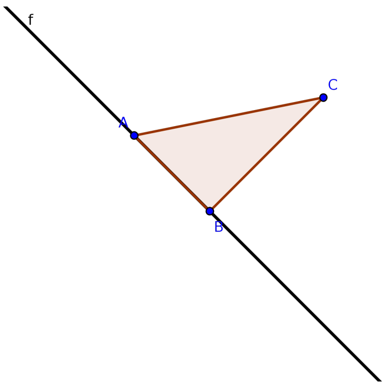
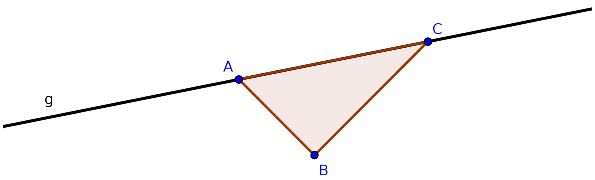
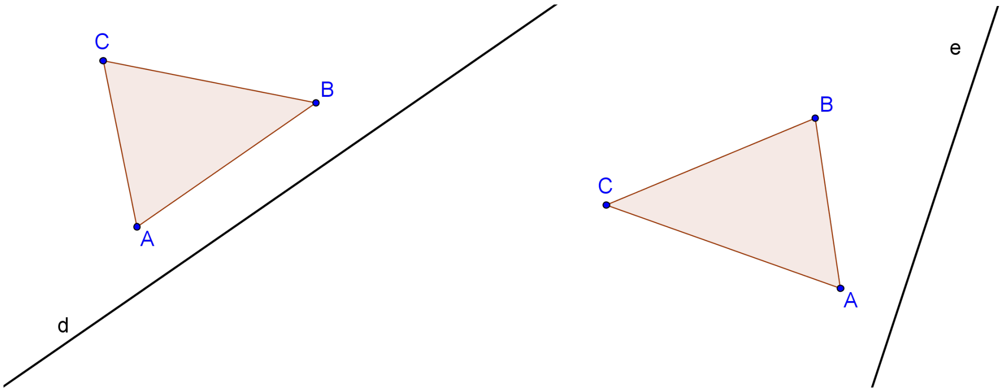


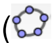
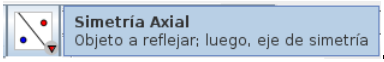
Figura 5.19: Simetría de una figura respecto de una recta.

En cada caso, construyan el simétrico del triángulo dibujado, respecto de la recta dada.







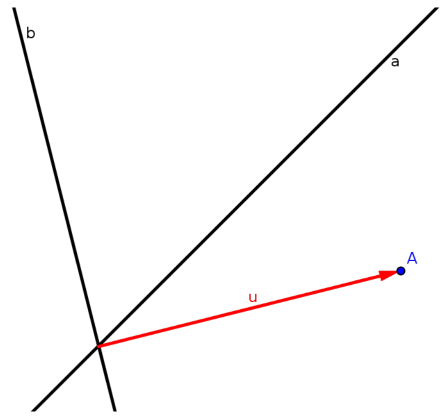
Problema 2 () **GeoGebra** tiene la herramienta **Simetría Axial**, activable mediante un botón identificado con este ícono: 

.

a) Construyan un punto A y una recta e investiguen el funcionamiento de esta herramienta. ¿Qué sucede con el punto A' al mover el punto A o al mover la recta?

b) Para comprender algunos aspectos de las simetrías, no utilizaremos la herramienta **Simetría Axial**, sino que trataremos de reemplazarla. Construyan en una nueva vista gráfica de **GeoGebra** una recta L por dos puntos A y B, y un punto C no perteneciente a la recta. Luego realicen las construcciones necesarias para que **GeoGebra** exhiba en la pantalla un punto C' que sea el simétrico de C respecto de la recta L y que lo haga en forma dinámica, es decir, de tal modo que al mover C con el mouse, se mueva también C' hacia su posición simétrica.

Problema 3 Interpreten la figura y respondan:



a) ¿Cuál es el simétrico del vector $\bar{u}$ respecto de la recta a? (Dibújenlo)

b) ¿Cuál es el simétrico del punto A respecto de la recta a? (Dibújenlo)

c) ¿Y respecto de la b?

d) ¿Cuál es el simétrico respecto de la recta b del simétrico respecto de la recta a del vector $\bar{u}$?

Observación: En los puntos a) y b) las soluciones son muy similares. El objetivo de estas preguntas es hacer notar que para estos problemas, pensar a los vectores como "flechas" o como "puntos" es prácticamente equivalente. A lo largo de los siguientes problemas a veces se pedirá que recurran a una representación y a veces a otra.

Problema 4 En la figura de este problema, los mismos objetos geométricos del Problema 3 aparecen referidos a un sistema de coordenadas.

Llamemos S_a a la función que le asigna a un punto su simétrico respecto de la recta a.

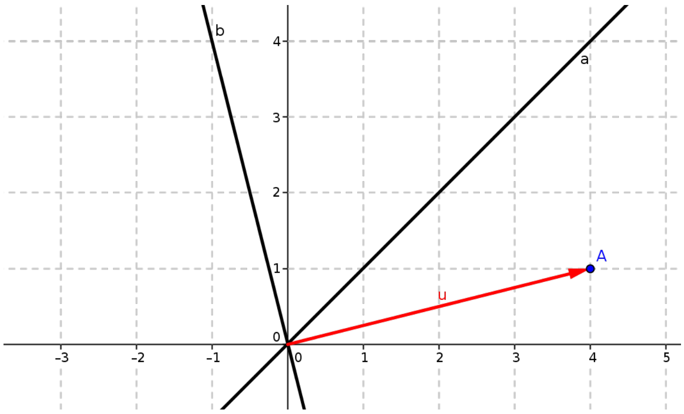
Podemos escribir entonces $S_a(A) = A'$. O bien $S_a(\bar{u}) = \bar{u}'$ (ver observación anterior).

Si al punto A lo describimos con sus coordenadas puestas en columna tenemos $A = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$:

a) Escriban las coordenadas de $S_a \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

b) Escriban las coordenadas de $S_b \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

c) Escriban las coordenadas de $S_b\left(S_a\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.



Problema 5 Sea $A = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$ y sea L la recta de ecuación $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Representen estos objetos en un sistema de coordenadas y escriban las coordenadas de $S_L(A)$.

Problema 6 Sean $A = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ y sea L la recta de ecuación $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ -10 \end{pmatrix}$. Representen estos objetos en un sistema de coordenadas y escriban las coordenadas de $S_L(A)$ y $S_L(B)$.

Problema 7 Se sabe que $A = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$, que $A' = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ y que $S_L(A) = A'$. Interpreten geométricamente y escriban la ecuación de la recta L.

Problema 8 La Figura 5.20 muestra una letra R que ha rotado alrededor de alguno de los puntos que aparecen nombrados, en sentido contrario al de las agujas del reloj.

a) ¿Cuál de los puntos es el centro de rotación? Expliquen un criterio para tomar la decisión y para descartar los demás puntos.

b) ¿Cuál ha sido el ángulo de rotación?

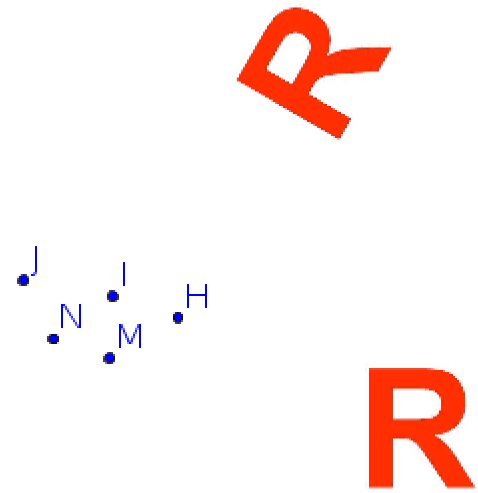
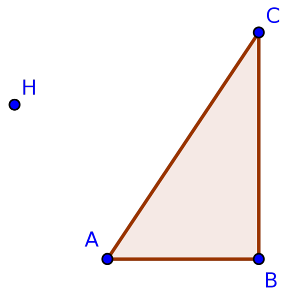
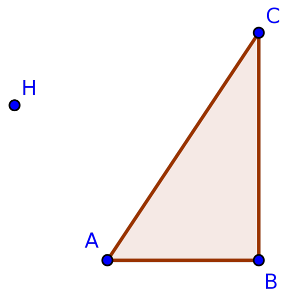


Figura 5.20

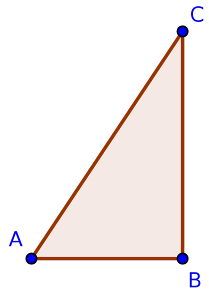
Problema 9 Dibujen el rotado del triángulo ABC, haciendo centro en el punto H, un ángulo de $45°$ en sentido positivo (contrario al de las agujas del reloj).



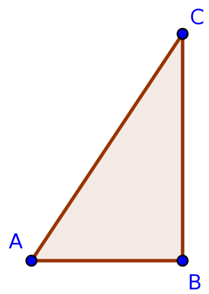
Problema 10 Dibujen el rotado del triángulo ABC, haciendo centro en el punto H, un ángulo de $45°$ en sentido negativo (el de las agujas del reloj).

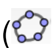

C
H
A
B

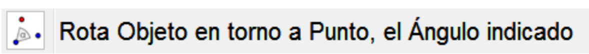
Problema 11 Dibujen el rotado del triángulo ABC, haciendo centro en cada uno de sus vértices, un ángulo de $90°$ en sentido negativo.



Problema 12 Dibujen el rotado del triángulo ABC, haciendo centro en cada uno de sus vértices, un ángulo de $90°$ en sentido positivo.



Problema 13 () **GeoGebra** tiene la herramienta **Rota Objeto en torno a Punto, el Ángulo indicado**, activable mediante un botón identificado con este ícono:



.

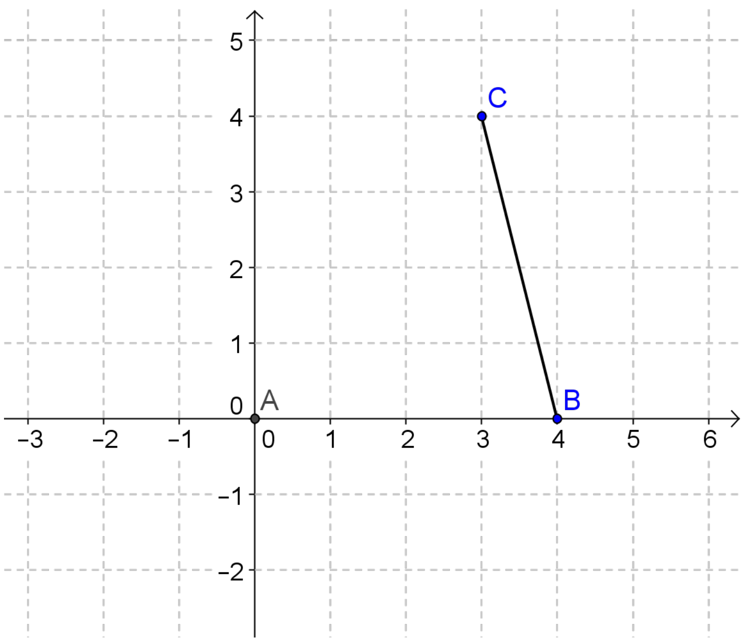
a) Construyan un triángulo ABC y un punto exterior D e investiguen el funcionamiento de esta herramienta. Observen el comportamiento de esta transformación si, en vez de ingresar el valor de un ángulo, construyen un deslizador e ingresan el valor del deslizador.

b) Para comprender algunos aspectos de las rotaciones –como se hizo con las simetrías en el Problema 2–, no utilizaremos la herramienta **Rota Objeto en torno a Punto, el Ángulo indicado**, sino que trataremos de reemplazarla. Construyan en una nueva vista gráfica de **GeoGebra** un triángulo ABC, y un punto D exterior. Construyan un deslizador α (eligiendo para él la opción "ángulo") Luego realicen las construcciones necesarias para que **GeoGebra** exhiba en la pantalla un triángulo $A'B'C'$ que sea el rotado de ABC con centro en D, un ángulo α y que lo haga en forma dinámica.

Problema 14 En este problema comenzaremos a referir las rotaciones a un sistema de coordenadas, como se hizo con las simetrías en el Problema 4. La Figura muestra el punto

$A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ y un segmento BC, con $B = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Llamemos $R_{(A,\alpha)}$ a la función que le asigna a un punto su rotado alrededor de A un ángulo α, en sentido contrario a las agujas del reloj.



a) Calculen las coordenadas de los puntos $B' = R_{(A,\alpha)}B$ y $C' = R_{(A,\alpha)}C$, para $\alpha = 30°$.

b) Dibujen el segmento $B'C'$.

c) ¿Para qué valor del ángulo β resulta $R_{(A,\beta)} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$?

Matrices y movimientos

Problema 15 El producto entre una matriz de 2×2 y un vector columna de 2×1 es otro vector columna de 2×1. Realicen el producto Ax, donde A y x son la matriz y el vector columna indicados.

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; $x = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

b) $A = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$; $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

c) $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Problema 16 Investiguen qué sucede en estos caso especiales, al calcular Ax, donde A y x son la matriz y el vector columna indicados:

a) $A = \begin{pmatrix} -2 & 7 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$; $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

b) $A = \begin{pmatrix} -2 & 7 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$; $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

c) $A = \begin{pmatrix} -2 & 7 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$; $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Problema 17 Consideren la matriz $A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 3 \\ \frac{1}{4} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$ y la ecuación $Ax = y$, donde x e y son vectores de 2×1.

a) Propongan un vector x para que y sea la suma de las columnas de A.

b) Propongan un vector x para que y sea la resta de las columnas de A.

c) Propongan un vector x para que y sea el doble de la primera columna de A más el triple de la segunda.

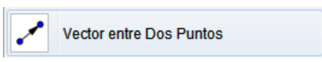
d) Propongan dos x distintos para que sea $y = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Problema 18 ( ) En la sección anterior vimos ciertas transformaciones (simetrías y rotaciones) que provocan movimientos en el plano de los puntos a los que se aplican. Una simetría respecto de una recta transforma ciertos puntos del plano $\mathbb{R}^2$ en otros puntos del plano. Lo mismo hacen las rotaciones.

Si el producto entre una matriz de 2×2 y un vector columna es otro vector columna, podemos pensar que una matriz también transforma puntos del plano $\mathbb{R}^2$ en otros puntos del plano. Para comprender esta idea pueden realizar estos "experimentos":

a) Construyan en **GeoGebra**:

(i) Un vector u que puedan mover. Para eso construyan dos puntos: $A = (0,0)$ y un B cualquiera. Luego usen la herramienta Vector entre Dos Puntos, activable mediante un botón identificado con este ícono:



.

(ii) Una matriz. Por ejemplo $P = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ (Recuerde que la manera de ingresarla en **GeoGebra** es escribir en la Barra de Entrada: `P={{2,-5},{-1,3}}`).

(iii) Un vector que sea el producto Pu. Si ingresan `P*u` en la Barra de Entrada, **GeoGebra** calculará Pu, pero lo representará con un punto. Si quieren ver la flecha del vector transformado, deben ingresar `Vector[P*u]` por la Barra de Entrada.

(iv) Muevan B con el mouse para observar el efecto que la matriz P hace sobre el vector u.

b) Realicen construcciones como las sugeridas en el ítem anterior, para ilustrar los cálculos que realizaron en los problemas que van del 15 hasta el 17.

Problema 19

a) ( ) Investiguen qué puede querer decir que la matriz

$$A = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

represente una simetría respecto de la recta de ecuación $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

b) Calculen $A \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$ e interpreten el resultado.

Problema 20 La matriz

$$T = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

es la matriz de simetría respecto de una recta $\mathbb{L}$. Encuentren la recta $\mathbb{L}$ y escriban su ecuación.

Problema 21 ( ) Investiguen qué puede querer decir que la matriz

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

represente una rotación de $60°$ alrededor del origen de coordenadas. ¿Es el giro a favor o en contra del sentido de las agujas del reloj?

Problema 22 La matriz

$$T = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

es la matriz de una rotación de un ángulo α, alrededor del origen de coordenadas. Encuentren la medida de α.

Problema 23 Lean el siguiente recuadro.

El producto de matrices tiene las siguientes propiedades.
Si $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2 \in \mathbb{R}^m$ y $\lambda \in \mathbb{R}$:

[I] $A(\bar{v}_1 + \bar{v}_2) = A\bar{v}_1 + A\bar{v}_2$

[II] $A(\lambda \bar{v}_1) = \lambda(A\bar{v}_1)$

a) A partir del Problema 18, construyan ejemplos para interpretar las propiedades del recuadro e interprétenlas geométricamente.

b) Hagan lo mismo con las matrices de los problemas 19 y 21.

Transformaciones lineales de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$

Problema 24 ( ) Lean el siguiente recuadro.

Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ y $\bar{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ resulta

$$A\bar{x} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$$

Es decir, la matriz A define una función (también llamada transformación) $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ que transforma cada vector $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ en el vector $\begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$.

Esta transformación, como se señaló en el recuadro del Problema 23, tiene las siguientes propiedades:

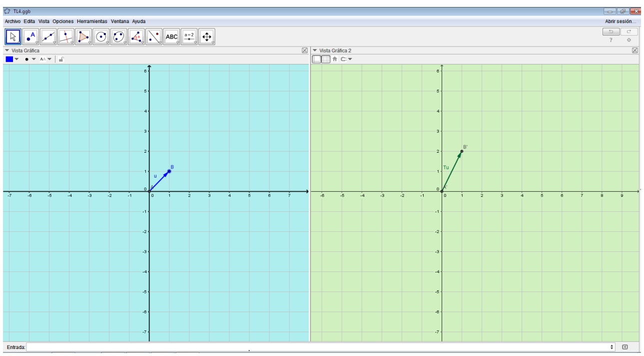
[I] $T\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = T\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + T\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$

[II] $T\left(\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}\right) = \lambda \left(T\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}\right)$

para cualesquiera $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ y cualquier $\lambda \in \mathbb{R}$.

Las funciones que verifican estas dos propiedades se llaman **Transformaciones Lineales de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$**.

No todas las transformaciones $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ son lineales. En este problema vamos a investigar la caracterización geométrica de estas transformaciones. Necesitarán los archivos `TL1.ggb`, `TL2.ggb`, `TL3.ggb` y `TL4.ggb`, que serán facilitados por sus docentes. En cada archivo se muestran las dos vistas gráficas. En la **Vista Gráfica 1** de la izquierda hay un vector u que pueden mover con la herramienta **Elige y Mueve**. En la **Vista Gráfica 2** se ve el vector transformado Tu, como muestra la captura de pantalla.



Abriendo cada archivo, uno por vez:

a) Investiguen si la función que transforma u en Tu es una transformación lineal. Expliquen por escrito un argumento convincente que respalde la decisión que tomaron.

b) En caso de que se trate de una transformación lineal ingresen en **GeoGebra** la matriz M tal que $Mx = T(x)$.

c) Construyan en la Vista Gráfica 1 un punto P y en la Vista Gráfica un punto $M * P$ para verificar si P y su transformado se comportan igual que u y Tu.

Problema 25 Las transformaciones lineales como las del Problema 24 van de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$.

a) Adapten las preguntas de ese problema al caso en que la matriz A se reemplace por

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

y luego respóndanlas.

b) Lo mismo para

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

c) Lo mismo para

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

d) Lean, finalmente, el siguiente recuadro:

> Si n y m son números enteros positivos y si A es una matriz de $\mathbb{R}^{n\times m}$ y $\bar{x}$ un vector de $\mathbb{R}^m$ (m filas y una columna), la matriz A define una función (también llamada transformación) $T : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ que transforma cada vector $\mathbb{R}^m$ en el vector $A\bar{x} \in \mathbb{R}^n$.
>
> Esta transformación tiene las siguientes propiedades:
>
> [I] $T(\bar{x}_1 + \bar{x}_2) = T\bar{x}_1 + T\bar{x}_2$
>
> [II] $T(\lambda\bar{x}_1) = \lambda(T\bar{x}_1)$
>
> para cualesquiera $\bar{x}_1, \bar{x}_2 \in \mathbb{R}^m$ y cualquier $\lambda \in \mathbb{R}$.
>
> Las funciones que verifican estas dos propiedades se llaman **Transformaciones Lineales de $\mathbb{R}^m$ en $\mathbb{R}^n$**.

Los problemas 26 y 27 están adaptados del libro [2].

Problema 26 De las siguientes transformaciones $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ decidan cuáles son lineales y cuáles no. Para las que son lineales encuentren una matriz A del tamaño adecuado de modo que $T(x) = Ax$ para cada x.

a) $T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x\\y\end{pmatrix}$

b) $T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x^2\\y\end{pmatrix}$

c) $T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y\\x\end{pmatrix}$

d) $T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\y\end{pmatrix}$

e) $T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y+1\end{pmatrix}$

f) $T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x+y\\x-y\end{pmatrix}$

g) $T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y\\y\end{pmatrix}$

h) $T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sqrt[3]{x}\\\sqrt[3]{y}\end{pmatrix}$

Problema 27 De las siguientes transformaciones, decidan de qué espacio a qué espacio van y cuáles son lineales y cuáles no. Para las que son lineales encuentren una matriz A del tamaño adecuado de modo que $T(x)=Ax$ para cada x.

a) $T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\x+y+z\end{pmatrix}$

b) $T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x+y\\x-y\\x-y\end{pmatrix}$

c) $T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

d) $T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

e) $T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x+y\\3y-4z\end{pmatrix}$

f) $T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\xy\\y\end{pmatrix}$

g) $T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y\\y\\x\\x\end{pmatrix}$

h) $T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\x+y\\x+z\\x+y+z\end{pmatrix}$

Problema 28 En el Problema 44 de la Unidad 4 se muestran vectores y se piden coordenadas respecto de distintas bases. Si a cada vector de $\mathbb{R}^2$ le corresponde otro vector de $\mathbb{R}^2$ formado por sus coordenadas respecto de una base, estamos en presencia de una transformación $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$. Esta transformación de asignación de coordenadas es una transformación lineal. Para cada caso del Problema 44:

a) Encuentren la fórmula que a cada vector $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ le asigna sus coordenadas respecto de la base dada.

b) Muestren que se trata de una transformación lineal.

c) Encuentren la matriz de la transformación lineal respecto de la base canónica.

Problema 29 Consideren la base de $\mathbb{R}^2$ dada por:

$$\mathcal{B}=\left\{\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}\right\}$$

Escriban cada uno de los siguientes vectores como combinación lineal de los vectores de la base $\mathcal{B}$.

a) $\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix}7\\-4\end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

Problema 30 Hallar en cada caso el vector $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$:

a) $C_{\mathcal{B}}\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}-4\\5\end{pmatrix}$

b) $C_{\mathcal{B}}\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}5\\-4\end{pmatrix}$

c) $C_{\mathcal{B}}\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\-\frac{5}{3}\end{pmatrix}$

Problema 31 Sea $A = \begin{pmatrix}2 & 1\\-1 & 3\end{pmatrix}$

a) Encuentren una fórmula para la transformación lineal

$$T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

b) Hallen, si existe, $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ tal que $T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$. ¿Hay más de uno?

c) Hallen, si existe, $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ tal que $T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$. ¿Hay más de uno?

d) Hallen, si existe, $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ tal que $T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$. ¿Hay más de uno?

Problema 32 Expliquen por qué en todas las preguntas del problema anterior se aclara «si existe» y se pregunta «¿Hay más de uno?» ¿De qué otra manera podrían suceder las cosas, si la matriz de la transformación lineal fuera distinta? Exploren ejemplos propuestos por ustedes.

Problema 33 Sea $B = \begin{pmatrix}1 & 4\\\frac{1}{2} & 2\end{pmatrix}$ y sea T la transformación lineal dada por

$$T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = B\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

a) Hallen, si existe, $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ tal que $T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\-\frac{3}{2}\end{pmatrix}$. ¿Hay más de uno?

b) Hallen, si existe, $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ tal que $T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$. ¿Hay más de uno?

Problema 34 Dada $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -4 & -6 \end{pmatrix}$ se define la transformación lineal

$$T(x) = Ax$$

a) ¿De qué espacio a qué espacio va la transformación lineal?

b) Encuentren dos vectores distintos x tales que $T(x) = \mathbb{O}$.

Problema 35 Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Se define la transformación lineal $T(x) = Ax$

a) ¿De qué espacio a qué espacio va la transformación lineal?

b) Encuentren los $b \in \mathbb{R}^3$ que son imagen de algún $x \in \mathbb{R}^2$, a través de la transformación T.

c) Encuentren los $b \in \mathbb{R}^3$ para los que tiene solución el sistema $Ax = b$.

Problema 36 Lean el siguiente recuadro:

> Si $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ es una transformación lineal definimos:
>
> - **Núcleo** de T como el conjunto de los $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ tales que $T(\bar{x}) = \mathbb{O} \in \mathbb{R}^m$. Es decir, el núcleo de una transformación lineal es el conjunto de vectores que se transforman en $\mathbb{O}$.
> - **Imagen** de T como el conjunto de los $\bar{y} \in \mathbb{R}^m$ para los que existe un $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ que verifica $T(\bar{x}) = \bar{y}$. Es decir, un vector está en la imagen de una transformación lineal si existe algún vector que se transforma en él.
>
> Nota 1: El núcleo de T se escribe como Nu(T). En inglés se llama **Kernel** (que significa literalmente núcleo), por lo que en algunos libros se escribe Ker(T).
>
> Nota 2: La imagen de T se escribe como Im(T). En algunos libros se llama **Rango** de T, por lo que lo escriben como Rg(T).

Teniendo en cuenta estas definiciones, ¿cómo se podrían redactar las preguntas de los problemas 34 y 35?

Problema 37 (Tomado de [2]). Sea $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la multiplicación por la matriz $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -8 & 4 \end{pmatrix}$. ¿Cuáles de los siguientes vectores están en Im(T)?

a) $\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} -3 \\ 12 \end{pmatrix}$

Problema 38 (Tomado de [2]). Para la misma T del problema anterior, ¿Cuáles de los siguientes vectores están en Nu(T)?

a) $\begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Problema 39 (Tomado de [2]). Sea $T : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la multiplicación por la matriz

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & 1 & -4 \\ 6 & 0 & -9 & 9 \end{pmatrix}$$

¿Cuáles de los siguientes vectores están en Im(T)?

a) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

Problema 40 (Tomado de [2]). Para la misma T del problema anterior, ¿Cuáles de los siguientes vectores están en Nu(T)?

a) $\begin{pmatrix} 3 \\ -8 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Problema 41 (Tomado de [2]). Sea $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que:

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad T\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \end{pmatrix},$$

a) Hallen la matriz de T respecto de la base $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

b) Hallen $T\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}$.

c) Hallen $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

Problema 42 Determinen cuáles de las siguientes transformaciones son lineales:

a) $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 / T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \end{pmatrix}$

b) $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 / T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 - 5 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}$

c) $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 / T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 3x_2 \\ x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$

d) $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} / T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1 \cdot x_2$

e) $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} / T(X) = \text{det}(X)$

Ejercitación extra

(1) Decidan cuáles de los siguientes conjuntos representan una base de $\mathbb{R}^3$:

a) $\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$

b) $\mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

c) $\mathcal{B}_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$

(2) Para el o los conjuntos que resulten ser base de $\mathbb{R}^3$ en el ítem anterior escriban las coordenadas de los siguientes vectores en esas bases:

a) $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

b) $v_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

c) $v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

d) $v_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

e) $v_5 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

f) $v_6 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

(3) Escriban una fórmula de la forma $C_{\mathcal{B}}(x) = A \cdot x$, donde A es una matriz y $x = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ es un vector cualquiera de $\mathbb{R}^3$, que nos permita calcular las coordenadas de $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ en base $\mathcal{B}$, donde $\mathcal{B}$ es cada base hallada en el ejercicio **(1)**. Vuelvan a calcular las coordenadas de los vectores del ejercicio **(2)** en base $\mathcal{B}$ y comparen los resultados obtenidos.

(4) Sea $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3/\ T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ una transformación lineal, donde

$$A=\begin{pmatrix}-1&2&-1\\2&3&1\\0&1&1\end{pmatrix}$$

es la matriz de la transformación en base canónica.

a) Encuentren la matriz de la transformación en base $\mathcal{B}$, donde $\mathcal{B}$ es cada base hallada en el ejercicio **(1)**.

b) Propongan otra base $\mathcal{B}'$ tal que sus elementos sean ortogonales entre sí, y encuentren la matriz de la transformación en esa base.

(5) Sea $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ una transformación lineal tal que

$$T\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{5}{13}\\\frac{12}{13}\end{pmatrix}\qquad y\qquad T\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{12}{13}\\\frac{5}{13}\end{pmatrix}$$

a) Escriban una fórmula que permita calcular $T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ para cualquier $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2$.

b) Se sabe que T es una simetría respecto de una recta. ¿Cuál es la recta?

c) Se dispone de las siguientes bases de $\mathbb{R}^2$:

$$\mathcal{B}_1=\left\{\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}\right\}\qquad\mathcal{B}_2=\left\{\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}\right\}\qquad\mathcal{B}_3=\left\{\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}\right\}$$

Elijan una de ellas y escriban $[T]_{\mathcal{B}}$, la matriz de T respecto de la base elegida.

(6) Sea $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ definida por $T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x-y\\y+2z\end{pmatrix}$

a) Muestren que T es una transformación lineal.

b) Calculen el núcleo y la imagen de T.

c) Den la matriz de la transformación en base canónica.

(7) Sea la transformación lineal $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ definida por

$$T\begin{pmatrix}-1\\1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\-4\\16\end{pmatrix},\ T\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\-5\\1\end{pmatrix}\ \text{y}\ T\begin{pmatrix}3\\2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\14\\-12\end{pmatrix}.$$

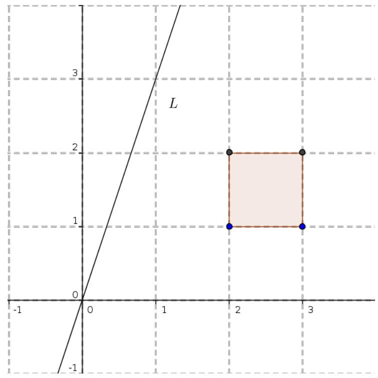
a) Encuentren la fórmula de la transformación y calculen $T\begin{pmatrix}3\\-1\\0\end{pmatrix}$.

b) Encuentren núcleo e imagen de T.

(8) Dado el gráfico:

a) Encuentren la matriz de la simetría respecto a la recta L en base canónica.

b) Encuentren el simétrico de cada vértice del cuadrado representado en la figura.



(9) Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y \\ y + 2z \end{pmatrix}$

a) Muestren que T es una transformación lineal.

b) Calculen el núcleo y la imagen de T.

c) Den la matriz de la transformación en base canónica.

(10) Sea la transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$T\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 16 \end{pmatrix}$, $T\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $T\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 14 \\ -12 \end{pmatrix}$.

a) Encuentren la fórmula de la transformación y calculen $T\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

b) Encuentren núcleo e imagen de T.

(11) Encuentren, si es posible, una transformación lineal $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ tal que

$Nu(T) = gen\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ e $Im(T) = gen\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$

(12) Consideren $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal tal que

$T\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$ y $T\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$.

a) Determinen, si es posible, $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

b) Calculen el núcleo y la imagen de T.

Unidad 6: Autovectores y autovalores

Contenidos: Autovectores y autovalores. Concepto. Introducción a partir de las transformaciones del plano. Autoespacio. Polinomio característico. Propiedades. Relación entre los autovalores y autovectores de una transformación lineal y la matriz asociada a la misma. Matriz semejante. Propiedades. Diagonalización de matrices.

Objetivos de esta unidad.

- Construir ejemplos de transformaciones en el plano que ayuden a comprender geométricamente los conceptos de autovalor y autovector.
- Concebir a las bases de autovectores, a partir de los ejemplos geométricos, como un recurso ventajoso para la representación matricial de una transformación lineal, respecto de una base.
- Comprender e interpretar los conceptos de autovector y autovalor definidos tanto en relación a una matriz como en relación a una transformación lineal.
- Construir e interpretar modelos dinámicos en **GeoGebra** para describir los autovectores y autovalores de una transformación lineal.

Transformaciones lineales y coordenadas

Problema 1 Sea S el subespacio de $\mathbb{R}^2$ definido por:

$$S = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

Si T es la transformación lineal que a cada vector le asigna su simétrico respecto de S, calculen:

a) $T\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$

b) $T\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}$

c) $T\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$

d) $T\begin{pmatrix}7\\-4\end{pmatrix}$

e) $T\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$

f) $T\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$

g) $T\begin{pmatrix}6\\3\end{pmatrix}$

h) $T\begin{pmatrix}-4\\-4\end{pmatrix}$

Problema 2 Para la misma T del Problema 1, sabiendo que $\begin{pmatrix}7\\-4\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} + (-3)\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$, ¿cómo se puede calcular $T\begin{pmatrix}7\\-4\end{pmatrix}$?

Problema 3 Verifiquen los transformados que se han calculado y graficado en el Problema 1, mediante

$$T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{3}{5} & \frac{4}{5}\\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

Problema 4 Adapten todo el análisis de los problemas 1, 2 y 3, al estudio de la simetría respecto de la recta que se muestra a continuación.

Sea S el subespacio de $\mathbb{R}^2$ definido por:

$$S = \left\{\lambda\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{R}\right\}$$

Si T es la transformación lineal que a cada vector le asigna su simétrico respecto de S,

a) Propongan dos vectores u_1 y u_2 tales que $T(u_1) = u_1$ y $T(u_2) = -u_2$.

b) Con los vectores propuestos, definan la base $\mathcal{B} = \{u_1, u_2\}$ y obtengan las matrices $[T]_{\mathcal{B}}$ y $[T]_{\mathcal{E}}$.

c) Calculen $T\begin{pmatrix}\frac{123}{41}\\ -\frac{37}{129}\end{pmatrix}$.

d) ¿Qué aspectos cambian y cuáles se mantienen iguales si, en vez de la base $\mathcal{B}$ se utiliza $\mathcal{B}' = \{u_2, u_1\}$

Problema 5 Sea $\mathcal{B} = \left\{\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix}\right\}$, una base de $\mathbb{R}^2$. Sea $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una transformación lineal tal que

$$T\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\-3\end{pmatrix} \quad \text{y} \quad T\begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$$

a) Obtengan las matrices $[T]_{\mathcal{B}}$ y $[T]_{\mathcal{E}}$.

b) Utilicen matrices en **GeoGebra** para programar la transformación T e ilustrar su funcionamiento.

c) Describan en palabras qué hace geométricamente la transformación T.

Problema 6 Sea $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$. Sea $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una transformación lineal tal que

$$T\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, T\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad T\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) Obtengan las matrices $[T]_{\mathcal{B}}$ y $[T]_{\mathcal{E}}$.

b) Utilicen matrices en **GeoGebra** para programar la transformación T e ilustrar su funcionamiento.

c) Describan en palabras qué hace geométricamente la transformación T.

Problema 7 Sea $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$. Sea $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una transformación lineal tal que

$$T\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad T\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) Obtengan las matrices $[T]_{\mathcal{B}}$ y $[T]_{\mathcal{E}}$.

b) Describan en palabras qué hace geométricamente la transformación T.

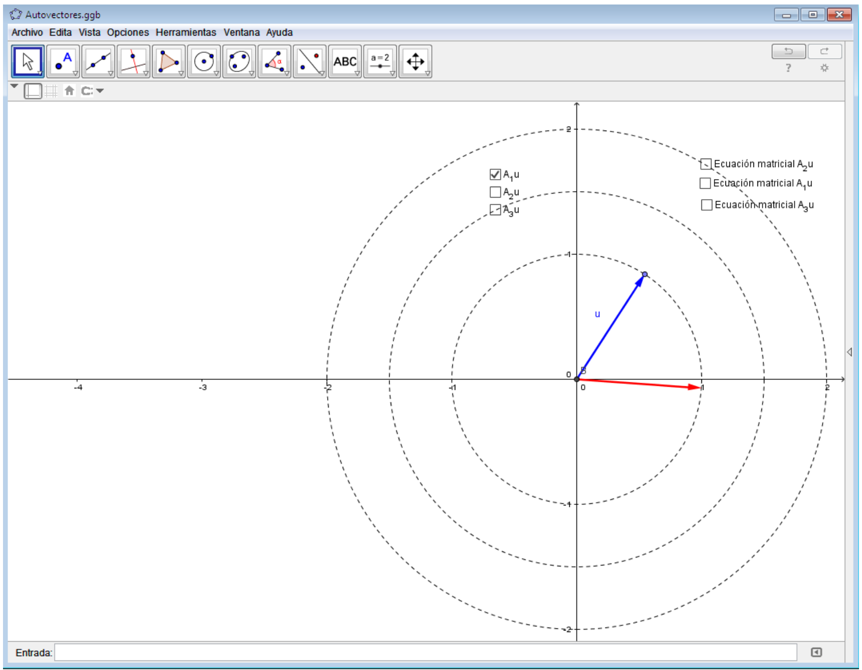
c) Utilicen matrices en **GeoGebra** para programar la transformación T e ilustrar su funcionamiento.

Problema 8 Lean el siguiente recuadro:

> Si $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es una transformación lineal dada por $T(x) = Ax$ (donde A es una matriz de $n \times n$) y existen un vector v no nulo y un escalar λ tales que $T(v) = \lambda v$ (es decir $Av = \lambda v$) decimos que v es un **autovector** de la transformación lineal T asociado al **autovalor** λ de T.
>
> Nota 1: Como A es la matriz de la transformación T respecto de la base canónica, también se dice que v es autovector de la matriz A asociado al **autovalor** λ de A.
>
> Nota 2: El vector v y el escalar λ se definen mutuamente: v es el autovector asociado al autovalor λ y también se dice que λ es el autovalor asociado al autovector v.
>
> Nota 3: En algunos libros, los autovalores se llaman también **vectores propios** o **eigenvectores**; y los autovalores, **valores propios** o **eigenvalores**.

Interpreten la definición usando como ejemplo las transformaciones de los problemas 1 al 7. ¿Cuál es la matriz A en cada caso? ¿Cuáles son los autovectores y cuáles los autovalores asociados?

Problema 9 ( ) En este problema vamos a investigar el comportamiento de unas transformaciones ilustradas en los archivos `Autovectores.ggb` y `Autovectores2.ggb`, que serán facilitados por sus docentes. En cada archivo se muestra un vector azul que se puede hacer girar y su imagen mediante distintas transformaciones, como muestra la captura de pantalla.



Abriendo cada archivo, uno por vez:

a) Investiguen la transformación y encuentren su matriz respecto de la base canónica.

b) Investiguen si tienen autovectores y autovalores. Expliquen qué es lo que observan para tomar esta decisión.

c) En caso de que sea posible, escriban la matriz de la transformación respecto de una base de $\mathbb{R}^2$ formada por autovectores.

Problema 10 Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Decidan cuál o cuáles de los siguientes son autovectores de A y encuentren sus autovalores asociados.

(i) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (iii) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (v) $\begin{pmatrix} 150 \\ 300 \end{pmatrix}$

(ii) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ (iv) $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (vi) $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$

b) Decidan cuál o cuáles de los siguientes escalares son autovalores de A y encuentren sus autovectores asociados.

(i) $\lambda = 0$ (ii) $\lambda = 1$ (iii) $\lambda = -1$ (iv) $\lambda = 2$ (v) $\lambda = -2$ (vi) $\lambda = 3$

Problema 11 (Tomado de [2]). Encuentren los autovectores y autovalores de las siguientes matrices:

a) $A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$

b) $A_2 = \begin{pmatrix} 10 & -9 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$

c) $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$

d) $A_4 = \begin{pmatrix} -2 & -7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

e) $A_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

f) $A_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Problema 12

a) Supongan que, para cada A_i del problema anterior $(i = 1, 2, \ldots 6)$, $T_i(x) = A_i x$ es una transformación lineal. Decidan, en cada caso, si existe una base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^2$ tal que $[T]_{\mathcal{B}}$, la matriz de T_i respecto de la base $\mathcal{B}$, sea diagonal.

b) Para cada T_i, construyan en **GeoGebra** una aplicación como la del Problema 9 que permita visualizar los autovectores y autovalores hallados.

Problema 13 (Tomado de [2]). Encuentren los autovectores y autovalores de las siguientes matrices:

a) $A_1 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -5 \\ \frac{1}{5} & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

c) $A_3 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -6 & -2 & 0 \\ 19 & 5 & -4 \end{pmatrix}$

d) $A_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ -4 & 13 & -1 \end{pmatrix}$

e) $A_5 = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -7 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

f) $A_6 = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 2 \\ 0 & -1 & -8 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

Problema 14

a) Supongan que, para cada A_i del problema anterior $(i = 1, 2, \ldots 6)$, $T_i(x) = A_i x$ es una transformación lineal. Decidan, en cada caso, si existe una base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ tal que $[T]_{\mathcal{B}}$, la matriz de T_i respecto de la base $\mathcal{B}$, sea diagonal.

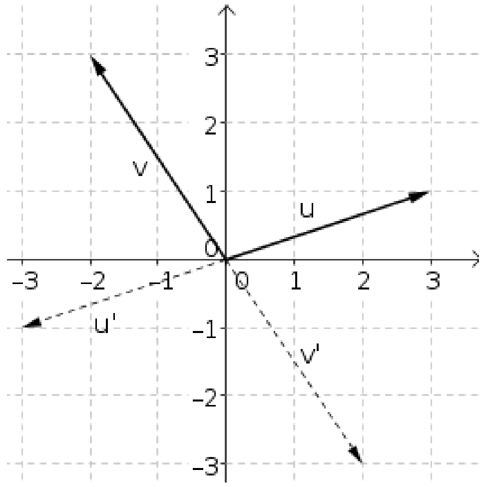
b) Para cada T_i, construyan en la vista 3D de **GeoGebra** una aplicación como la del Problema 9 que permita visualizar los autovectores y autovalores hallados.

Problema 15 Sea $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una transformación lineal que verifica $T(u) = u'$ y $T(v) = v'$, para los vectores u y v que se ven en la figura.

a) Escriban una fórmula para T.

b) Escriban la matriz de T relativa a la base canónica de $\mathbb{R}^2$.

c) ¿Tiene autovalores y autovectores la matriz? Expliquen su respuesta.

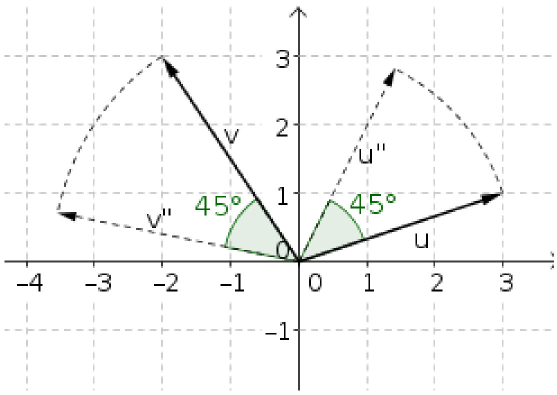


Problema 16 Sea $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una transformación lineal que verifica $T(u) = u''$ y $T(v) = v''$, para los vectores u y v que se ven en la figura.

a) Determinen las coordenadas de los vectores u'' y v''.

b) Escriban la matriz de T relativa a la base canónica de $\mathbb{R}^2$.

c) ¿Tiene autovalores y autovectores la matriz? Expliquen su respuesta.



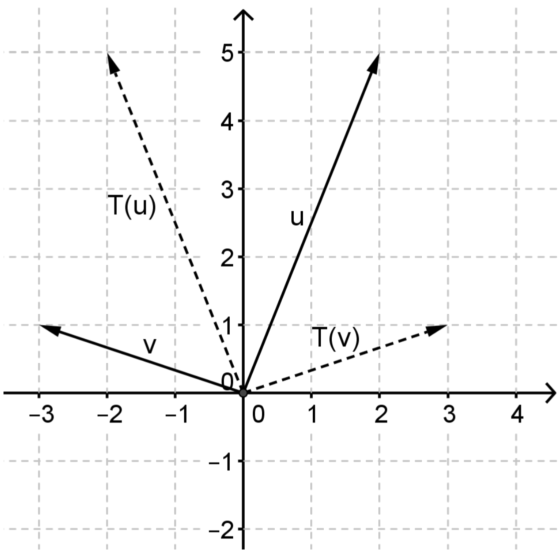
Problema 17 Sea $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una transformación lineal. En la figura se ven dos vectores, u y v y sus transformados.

a) ¿Son u y v autovectores de la transformación? ¿Por qué?

b) Escriban la matriz de T relativa a la base $\mathcal{B} = \{u, v\}$ de $\mathbb{R}^2$.

c) Determinen una base $\mathcal{B}'$ formada por autovectores de T y escriban la matriz de T relativa a esa base $\mathcal{B}'$.

d) Escriban una fórmula para T.



Problema 18 Sea $A = \begin{pmatrix} -7 & 5 & 5 \\ -6 & 4 & 3 \\ -4 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

a) Sabiendo que $\lambda = 3$ es autovalor de A, encuentren sus demás autovalores.

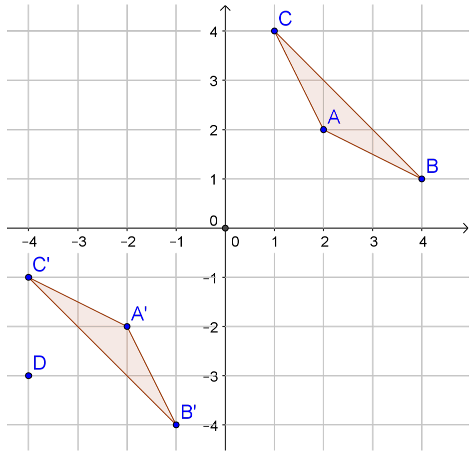
b) Investiguen si A es diagonalizable y justifiquen su respuesta.

Problema 19 Sea $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la transformación lineal que transforma el triángulo ABC en el triángulo $A'B'C'$, según muestra la figura.

a) Determinen la matriz de T respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^2$.

b) Determinen una base respecto de la cual la matriz de T sea diagonal y escriban dicha matriz.

c) Muestren cómo se pueden usar ambas matrices para calcular $T(D)$, donde D es el punto que también se ve en la figura.



Problema 20 Decidan si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa. Si es verdadera demuéstrenlo con algún argumento, si es falsa muestren un contraejemplo:

a) Todas las matrices cuadradas inversibles son diagonalizables.

b) Existen matrices cuadradas que son inversibles y diagonalizables.

c) Todas las matrices cuadradas diagonalizables son inversibles.

Problema 21 Sea $A = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{3}{4} \\ -\frac{9}{4} & \frac{9}{4} \end{pmatrix}$ y sea $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $T(x) = Ax$. Respondan cada pregunta y expliquen su decisión, incluyendo en cada explicación un gráfico que ayude a comprenderla:

a) ¿Tiene T dos autovectores ortogonales?

b) ¿Tiene T dos autovectores de norma 1?

c) ¿Exite algún x tal que $\|T(x)\| = 2\|x\|$?

Ejercitación extra

(1) Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una transformación lineal cuya fórmula es $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{6}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{9}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

a) Encuentren los autovectores de T. ¿Son ortogonales?

b) Sea $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ una base de $\mathbb{R}^2$. Encuentren la matriz de la transformación T respecto de la base $\mathcal{B}$.

(2) Sea $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ una base de $\mathbb{R}^2$ y $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. Se define la matriz D como: $D = C_{\mathcal{B}E} \cdot A \cdot C_{E\mathcal{B}}$

a) Encuentren la matriz D.

b) ¿Cuáles son los autovalores y los autovectores de D?

(3) Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, una transformación lineal

a) Encuentren los autovalores y los autovectores de T.

b) Encuentren la matriz de la transformación lineal en la base que forman los autovectores.

(4) Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una transformación lineal que verifica que $T \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$ y $T \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \\ -2 \end{pmatrix}$

a) Hallen k sabiendo que $\lambda = 2$ es un autovalor de T.

b) Hallen $[T]_{\mathcal{B}}$ siendo $\mathcal{B}$ la base de autovectores de T.

(5) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} \alpha & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$

a) Encuentren el polinomio característico de la matriz A para $\alpha = 3$ y hallá sus autovalores.

b) Expliquen para qué valores de α el polinomio característico de A tiene:

(i) Dos autovalores distintos.

(ii) Un único autovalor.

(iii) Autovalores complejos

(6) Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una transformación lineal. Se sabe que
$T \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \end{pmatrix}$ y $T \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$.

a) ¿Es cierto que $\begin{pmatrix} 5 \\ -7 \end{pmatrix}$ es un autovector de T? De ser así, ¿cuál es el autovalor asociado?

b) ¿Es cierto que 3 es autovalor de algún autovector de T? De ser así, ¿de qué autovector?

c) Den la diagonalización de la matriz de la transformación T.

(7) El polinomio característico de una matriz es $x^2 + 9$ ¿De qué tamaño es la matriz y cuáles son sus autovalores?

(8) Decidan si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa. Si es verdadera demuéstrenlo con algún argumento; si es falsa propongan un contra-ejemplo.

a) Todas las matrices cuadradas inversibles son diagonalizables.

b) Existen matrices cuadradas que son inversibles y diagonalizables.

(9) Encuentren los autovalores y autovectores de $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ y, si es posible, obtengan P tal que $P^{-1} \cdot A \cdot P$ es una matriz diagonal.

(10) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ \alpha & -2 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ con $\alpha \in \mathbb{R}$.

a) Calculen los valores de α para los que A es diagonalizable.

b) Para dichos valores de α, calculen los autovalores y autovectores de A y A^{-1}.

(11) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & a \\ 3 & -1 & b \\ -2 & 0 & c \end{pmatrix}$

a) Calculen los valores de a, b y c de forma que $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ sea un autovector cuyo autovalor correspondiente es $\lambda = -1$.

b) Encuentren los demás autovalores y autovectores.

Unidad 7: Números Complejos

Contenidos: Introducción a partir de matrices reales cuadradas que no tienen autovalores reales: ecuación característica con coeficientes reales y raíces no reales. Definición a partir de pares ordenados de números reales. Geometría de $\mathbb{C}$. Operaciones: suma, producto, conjugado, cociente. Representaciones geométricas: complejos particulares, reales-imaginarios, módulo. Forma binómica. Operaciones. Forma polar: potenciación, radicación, logaritmo.

Objetivos de esta unidad.

- Comprender las limitaciones de los números reales para resolver ecuaciones polinómicas, en particular, en el contexto en que se trata de la ecuación característica de la matriz de una transformación lineal.
- Representar los números complejos de forma vectorial, binómica y trigonométrica y comprender las ventajas y desventajas de cada representación.
- Operar eficientemente en el conjunto $\mathbb{C}$ de los números complejos.
- Establecer analogías entre $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$, por ejemplo, para resolver sistemas de ecuaciones lineales en $\mathbb{C}$.
- Manejar las coordenadas polares para describir la geometría de $\mathbb{R}^2$, que es la del plano complejo.

Problema introductorio

Problema 1 Sea $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 / T(x) = Ax$ con

$$A = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

a) Investiguen e interpreten geométricamente la transformación T.

b) ¿Tiene autovectores y autovalores esta transformación? Respondan esta pregunta con un argumento geométrico y luego con uno algebraico.

Operaciones con números complejos

Problema 2 Lean el siguiente recuadro:

En lo que sigue vamos a tener en cuenta la siguiente relación: si $z = a+bi$ es un número complejo, establecemos una escritura vectorial (a, b). Al hacer esto, observamos que resulta natural la representación gráfica de estos números, pues resulta idéntica a la de los vectores en $\mathbb{R}^2$. Tomemos el sistema de ejes cartesianos xy, en el eje x vamos a representar al valor a, y en el eje y al valor b. En este caso en particular llamaremos al eje x real, y al eje y imaginario.

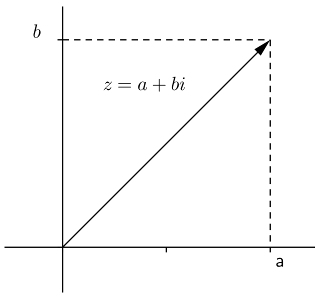


Figura 7.21: Representación gráfica del complejo $z = a + bi$.

Así, si pensamos la notación $1 = (1, 0)$ e $i = (0, 1)$, el número $a + bi$ es una combinación lineal de 1 e i:

$$a + bi = a \cdot 1 + b \cdot i = a \cdot (1, 0) + b \cdot (0, 1) = (a, b)$$

Problema 3 Sean $z_1 = 1 + 3i$ y $z_2 = 3 + 2i$ dos números complejos.

a) Representen ambos números en el mismo sistema de ejes cartesianos en forma vectorial.

b) Una vez graficados ambos vectores realicen su suma en forma gráfica.

c) Utilizando **GeoGebra**, realicen una construcción que permita sumar dos números complejos cualesquiera de la forma $z_1 = a + bi$ y $z_2 = c + di$.

Observación: GeoGebra interpreta los números complejos y opera con ellos. La notación `2+3i` produce el objeto z_1, que se puede observar en la **Vista**

Gráfica. En la **Vista Algebraica** se visualiza como `2+3i` o como `(2,3)`, según cómo se configure esa visualización, lo que puede hacerse seleccionando el objeto, haciendo clic con el botón derecho y seleccionando **Propiedades**, solapa **Álgebra**, opción **Coordenadas**. entre esas opciones hay también otras visualizaciones que veremos más adelante, pero que no hace daño investigar. Para ingresar la unidad imaginaria i en la Barra de Entrada, se usan las teclas `Alt + i`.

Problema 4 En el conjunto de los reales, para cualquier terna de números a, b y c, es equivalente calcular $a+b$ y $b+a$. Esto es la **conmutatividad** de la suma. También son equivalentes $(a+b)+c$ y $a+(b+c)$: esto es la **asociatividad** de la suma. Se tienen los números complejos $z_1 = a + bi$ y $z_2 = c + di$. Comprueben que la forma en que se definió la suma hace que esta operación sea también conmutativa y asociativa para números complejos.

Problema 5 Si se sabe que, por definición, es $i^2 = -1$, ¿cómo calcularían...?

a) i^3 b) i^4 c) i^{317}

Problema 6 Escriban en forma binómica a los siguientes números complejos

a) $(2+3i) - 4\cdot(5-2i)$
b) $(2+i)^2 - (6-2i)^2$
c) $3i\cdot(2-i)\cdot(1+2i)$
d) $i\cdot(3-i)^2\cdot(4+2i)$
e) $(1+i+i^2+i^3)^{100}$

Problema 7 Calculen y expresen en forma binómica:

a) $(1+i)^4 + i^{37}$ b) $(1-i)^{21} + i^{85}$ c) $(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i)^{302}$

Problema 8 Encuentren en cada caso, si es posible, la forma binómica de los números complejos z que verifican las siguientes ecuaciones:

a) $z + (1-i) = 3+2i$
b) $-5z = 5+10i$
c) $(i-z) + (2z-3i) = -2+7i$

Problema 9 ( )

a) Representen gráficamente en **GeoGebra** el número complejo $z = a + bi$ utilizando deslizadores.

b) Construyan un cartel en un costado de la vista gráfica que, para cada posición del punto z indique cuál es su distancia al origen de coordenadas. Compartan con sus compañeros las distintas formas posibles de programar ese cartel.

Problema 10 Lean el siguiente recuadro:

> Sea $z = a + bi$ un número complejo. Definimos como **módulo de** z al número real $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

¿Es posible representar gráficamente a todos los números complejos de módulo igual a 1? Si lo consideran posible háganlo, si no justifiquen por qué no lo consideran posible.

Problema 11 (GeoGebra) Construyan, a partir de las ideas discutidas en el Problema 9, una aplicación de **GeoGebra** que permita, dados dos números complejos z_1 y z_2, investigar la relación entre

$$|z_1 + z_2| \quad \text{y} \quad |z_1| + |z_2|$$

Problema 12 Averigüen en Internet a qué se llama **desigualdad triangular de números complejos**.

Problema 13 Decidan si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa. Den una justificación en caso de que sea cierta o un contraejemplo en cado de ser falsa.

a) $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$ para todo $z, w \in \mathbb{C}$.

b) $|\lambda \cdot z| = \lambda \cdot z$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ y todo $z \in \mathbb{C}$.

c) $|\frac{z}{|z|}| = 1$ para todo $z \in \mathbb{C} - \{0\}$.

Problema 14 Represénten en el plano los siguientes conjuntos:

a) $\{z \in \mathbb{C} / |z| \leq 2\}$

b) $\{z \in \mathbb{C} / |z - (1 + i)| = 1\}$

c) $\{z \in \mathbb{C} / |z - i| = |z + i|\}$

d) $\{z \in \mathbb{C} / |z + i| \leq 1\}$

e) $\{z \in \mathbb{C} / |2z - 4i| \leq 1\}$

Problema 15 Dado un número complejo $z = a + bi$, se llama conjugado de z al número complejo $\overline{z} = a - bi$.

a) Demuestre que $|z| = |\overline{z}|$.

b) ¿A qué es igual el conjugado de $\overline{z}$?

Problema 16 La suma de dos números complejos conjugados es igual a 18 y la diferencia es igual a $4i$ ¿Cuáles son dichos números?

Problema 17 ¿Qué relación hay entre z y $|z|$? Ilustrarla con ejemplos.

Problema 18 El producto de dos números complejos conjugados en igual a 80. Si la componente real es 4 ¿Cuánto vale su parte imaginaria?

Problema 19 Dado que $z = 1 - 5i$ y $w = 3 + 4i$, encuentren

a) $\frac{z}{w}$ b) $\frac{\overline{z}}{w}$ c) $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)}$ d) $\left|\frac{z}{w}\right|$

Problema 20 Calcule el valor de k de forma tal que el número complejo que se obtiene de la siguiente división este representado gráficamente en la bisectriz del primer cuadrante:

$$\frac{2+i}{k+i}$$

a) Considerar $k \in \mathbb{R}$.

b) Considerar $k \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$.

Problema 21 Encuentren el valor k para que el cociente $\frac{2-ki}{k-i}$ sea:

a) Un número imaginario puro. b) Un número real.

Problema 22 Decidan si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando la elección hecha.

a) $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$ para todo $z, w \in \mathbb{C}$

b) $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$ para todo $z, w \in \mathbb{C}$

c) $\overline{z^n} = \overline{z}^n$ para todo $z \in \mathbb{C}$ y $n \in \mathbb{N}$

Problema 23 En cada uno de los siguientes casos, encuentren un número entero n de manera que las siguientes igualdades valgan para todo z complejo.

a) $\frac{z+\overline{z}}{n} = Re(z)$ b) $\frac{z-\overline{z}}{n} = i \cdot Im(z)$

Forma trigonométrica de los números complejos

Problema 24 ( ) en el Problema 3 se investigó la interpretación gráfica de la suma de números complejos. Construyan en **GeoGebra** dos números cualesquiera como $z_1 = 3 + 4i$ y $z_2 = 1 - 2i$, de modo que luego estarán libres para ser arrastrados con el mouse. Definan el número $z_3 = z_1 * z_2$ (donde $*$ es la multiplicación en la notación de **GeoGebra**). Luego muevan z_1 y z_2 e investiguen: ¿hay alguna interpretación geométrica para el producto $z_1 \cdot z_2$.

Problema 25 Lean el siguiente recuadro:

Un número complejos $z = a + bi$ se puede caracterizar por su módulo $|z|$ y por el ángulo que determina con la parte positiva del eje x. A este ángulo lo llamaremos **argumento** del número complejo z y lo notaremos $Arg(z)$. El argumento se mide desde el eje x positivo en sentido contrario a las agujas del reloj.

Observación 1: Si la flecha que representa a un complejo z forma con el eje x positivo un ángulo de medida α_0, entonces la flecha de igual longitud que forme con dicho eje un ángulo de medida $\alpha_0 + 2k\pi$ (para un entero k) representará al mismo número complejo (piensen en un gráfico esta afirmación). Por lo tanto cualquier ángulo $\alpha_0 + 2k\pi$ (para un entero k) es también el argumento de dicho número complejo.

Observación 2: En general, es más cómodo para identificar un número complejo elegir un argumento en el intervalo $(-\pi, \pi]$. Cada número complejo distinto de 0 tiene exactamente un argumento en ese intervalo: desde el eje x positivo en sentido contrario a las agujas del reloj, desde $Arg(z) = 0$ hasta $Arg(z) = \pi$, para números complejos que están en el primer o segundo cuadrante y desde el eje x positivo en sentido de las agujas del reloj, retrocediendo desde $Arg(z) = 0$ hasta $Arg(z) = -\pi$, para números complejos que están en el cuarto o tercer cuadrante. A esta elección del argumento se la suele llamar **argumento principal** de z. Por lo tanto, si denotamos $arg(z)$ al argumento principal de z, resulta $-\pi < arg(z) \leq \pi$.

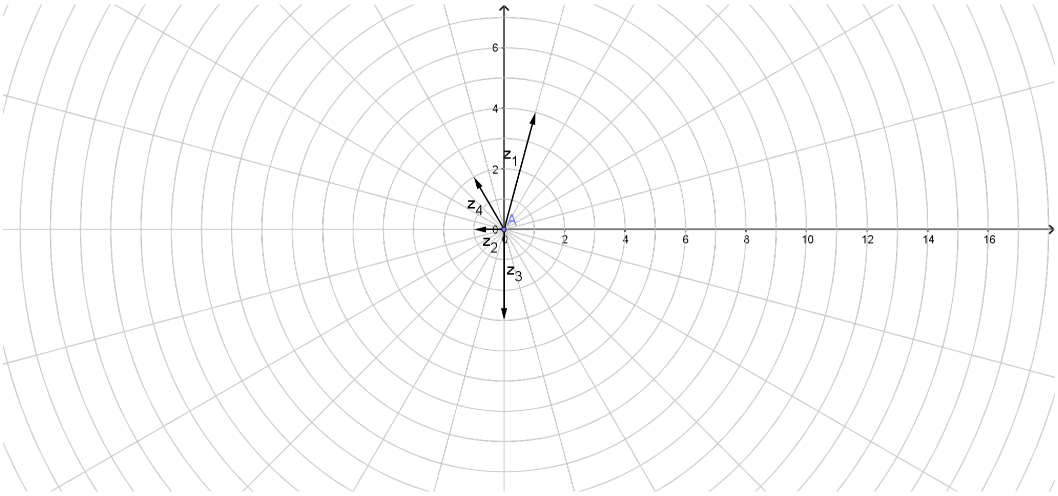


Figura 7.22: Figura del Problema 25a)

a) Sin el archivo del Problema 24 a la vista, observen la Figura 7.22 y completen la siguiente tabla:

Número	Módulo	Argumento
z_1		
z_2		
z_3		
z_4		

b) Ubiquen en el gráfico de la Figura 7.22 los productos que se listan a continuación y completen la siguiente tabla:

Producto	Módulo	Argumento	Forma trigonométrica	Forma binómica
$z_1 \cdot z_2$				
$z_3 \cdot z_4$				
$z_1 \cdot z_3$				
$z_1 \cdot z_4$				
$z_1 \cdot z_1$				
$z_2 \cdot z_2$				
$z_3 \cdot z_3$				

Problema 26 Representen en el siguiente plano complejo:

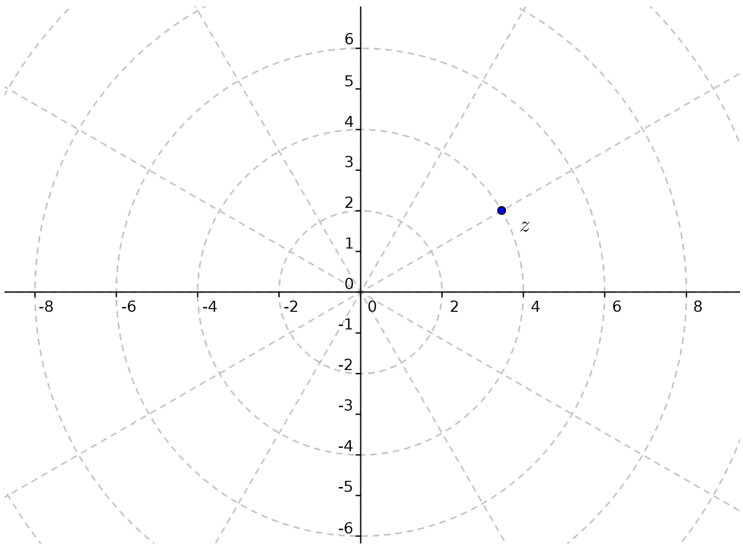


Figura 7.23

a) Todos los números complejos que tengan el mismo argumento que z.

b) Todos los números complejos que tengan el mismo módulo que z.

c) Todos los números complejos que tengan módulo menor que z.

d) Todos los números complejos que tengan módulo mayor que z, y que además, tanto su parte real como su parte imaginaria sean positivas.

e) Todos los números complejos que tengan módulo mayor que z tales que su parte imaginaria sea cero.

f) Todos los números complejos que tengan módulo mayor que z tales que su parte real sea negativa.

g) Todos los números complejos que tengan la misma parte real que z.

Problema 27

a) Representen gráficamente los siguientes números complejos:

(i) $z_1 = 2 + i$ (ii) $z_2 = 1 + \sqrt{3}i$ (iii) $z_3 = 1 + i$

b) Encuentren el argumento de los números del ítem anterior y su módulo.

Problema 28 Lean la siguiente definición:

Ahora, encuentren la forma trigonométrica de los siguientes números complejos:

a) $z = 3 + 3i$

b) $z = -3 + 3i$

c) $z = 3 - 3i$

d) $z = -3 - 3i$

Problema 29 El punto A en el siguiente plano representa un número complejo que, expresado en su forma trigonométrica es $4 \cdot (\cos(\frac{3}{2}\pi) + i\,\mathrm{sen}(\frac{3}{2}\pi))$

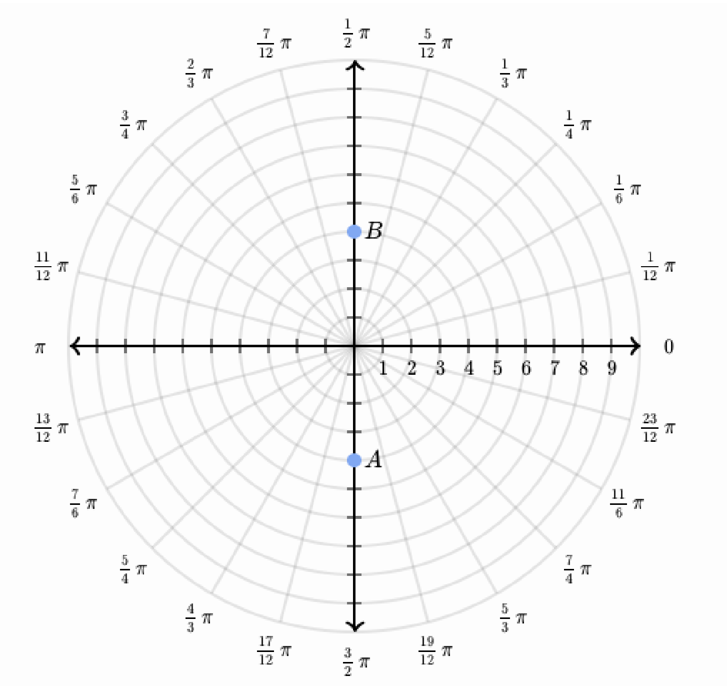


Figura 7.24

¿Cuál es la forma binómica de A?¿Cuál es la forma binómica del número complejo representado por B?¿Y su forma trigonométrica?

Problema 30 Den ejemplos para cada uno de los items del Problema 26, representen estos números en el plano y expresen tanto su forma binómica como trigonométrica.

Problema 31 Escriban en forma binómica los siguientes números complejos

a) $z = 2(\cos(0) + i\,\mathrm{sen}(0))$

b) $z = 3(\cos(\frac{5}{4}\pi) + i\,\mathrm{sen}(\frac{5}{4}\pi))$

c) $z = 4(\cos(\frac{11}{6}\pi) + i\,\mathrm{sen}(\frac{11}{6}\pi))$

Problema 32 Escriban en forma trigonométrica los siguientes números complejos y representen gráficamente su módulo y su argumento:

a) $z = -3$

b) $z = 4i$

c) $z = 1 - \sqrt{3}i$

d) $z = -3 + \sqrt{3}i$

Problema 33

a) A partir de lo investigado en el Problema 25a), escriban una explicación de cómo calcular el producto de dos números complejos, dados en forma trigonométrica. Ilústrenla con ejemplos.

b) Si $z = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$, calculen z^{17}.

Problema 34 Calculen, usando escritura trigonométrica, lo siguiente:

a) $(2\sqrt{3} + 2i)(3 - 3\sqrt{3}i)$

b) $(2\sqrt{3} + 2i)^6$

Luego, escriban el resultado en forma binómica y comprueben que el resultado obtenido coincide con el resultado del mismo cálculo si se hubiera trabajado unicamente con la escritura binómica.

Problema 35 Completen la siguiente tabla

Cartesiana	Binómica	Trigonométrica
$(1, -1)$		
	$\sqrt{3} - i$	
		$2(\cos(\frac{\pi}{3}) + i\,\mathrm{sen}(\frac{\pi}{3}))$

Problema 36 (Este problema y el siguiente están tomados de [10]) El punto A representa al número complejo $a + bi$ en el siguiente plano complejo:

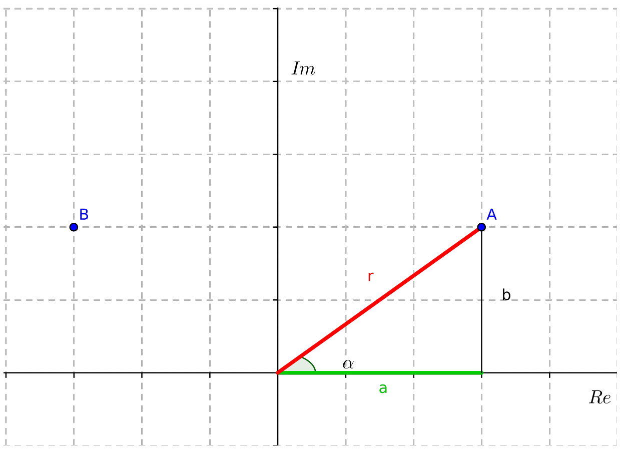


Figura 7.25

¿Cuáles de las siguientes expresiones corresponden a una forma trigonométrica del número complejo que representa el punto B?

a) $r(-\cos(\alpha) + i\,\mathrm{sen}(\alpha))$
b) $r(\mathrm{sen}(\alpha) + i\cos(\alpha))$
c) $r(\cos(\alpha) + i\,\mathrm{sen}(\alpha))$
d) $r(\cos(\pi - \alpha) + i\,\mathrm{sen}(\pi - \alpha))$

Problema 37 A representa a un número complejo cuya forma trigonométrica es $4 \cdot (\cos(\frac{13}{2}\pi) + i\,\mathrm{sen}(\frac{13}{2}\pi))$ y B es un punto en el siguiente plano complejo:

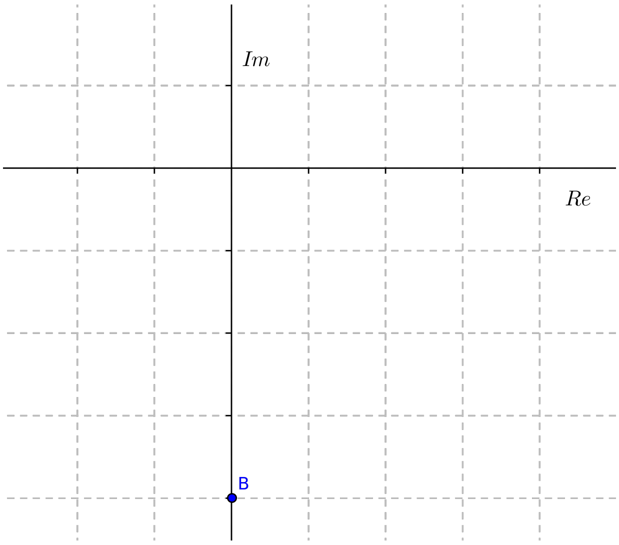


Figura 7.26

¿Cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas? Expliquen el porqué de sus respuestas.

a) $B = -4i$ y la expresión A es equivalente a ésta.
b) A y B tienen el mismo argumento, pero no tienen el mismo módulo.
c) A y B tienen el mismo módulo, pero tienen argumentos distintos.
d) A y B son iguales porque tienen el mismo módulo y el mismo argumento.

Ejercitación extra

(1) Representen en el plano los $z \in \mathbb{C}$ que verifican

a) $|z| = 5$
b) $|z| \leq 3$
c) $z = \overline{z}$

(2) Representen en el plano complejo:

a) Si $z_0 = 1 - i$, el conjunto $A = \{z \in \mathbb{C}, |z - z_0| \leq 3\}$.
b) Si $z_0 = -1$ y $w_0 = 2 + i$, el conjunto $B = \{z \in \mathbb{C}, |z - z_0| \leq |z - w_0|\}$.

c) El conjunto $C = \{z \in \mathbb{C}, Re(z) \leq 1; Im(z) \leq 1\}$.

d) El conjunto $D = \{z \in \mathbb{C}, |z - (1 + 3i)| = 3\}$.

e) El conjunto de puntos que viene dado por $E = C \cap D$.

(3) Escriban en forma binómica todos los complejos tales que:

a) $z^2 = 3 - \sqrt{3}$ b) $z^2 = 16 + 14\sqrt{3}i$ c) $z^2 + z + 1 = 0$

(4) Calculen

a) i^7

b) i^{39}

c) i^{-1}

d) i^{-19}

e) $i^{18} - 3i^7 + i^2(1 - i^4) - (-i)^{26}$

(5) Decidan de cuál o cuáles de las siguientes ecuaciones el número $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ es una solución.

a) $1 + z + z^2 = 0$ b) $z + 2\bar{z} = |z|$ c) $\frac{1}{z} - z^2 = 0$

(6) Resuelvan las siguientes ecuaciones en $\mathbb{C}$

a) $z + (1 + i) = -i$

b) $iz = (1 + i)(1 - i)$

c) $i = \frac{1}{z}$

d) $(z + i)^2 = (z - 2i)^2$

e) $5z + iz + 4 = 0$

f) $z^3 + 3z = z(z^2 - 2 + 3i) + i$

g) $i^{261}z^2 + \bar{z} = 0$

(7) Hallen los números complejos z y u que verifican:

$$\begin{cases} (1 + i)z - iu &= 2 + i \\ (2 + i)z + (2 - i)u &= 2i \end{cases}$$

(8) El polinomio característico de una matriz es $x^2 + 9$. ¿De qué tamaño es la matriz y cuáles son sus autovalores?

(9) a) Sea $z = a + bi$ un número complejo, con a y b reales no nulos. Decidí cuáles de los siguientes números son reales:

(i) La suma de z y su conjugado.

(ii) La diferencia entre z y su conjugado.

(iii) El producto entre z y su conjugado.

(iv) El cociente entre z y su conjugado.

(10) a) Resuelvan el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

b) Resuelvan el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} 2 & i \\ i & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 3i \\ 2 - 2i \end{pmatrix}$$

(11)

a) Hallen el valor real del número b para que z sea también un número real:

$$z = \frac{4+bi}{2+i}$$

b) Hallen el número complejo w que verifica la siguiente ecuación:

$$\frac{w}{3+4i} + \frac{2w+5i}{1-2i} = 2+2i$$

(12) a) Calculá el módulo y el argumento del número complejo que se obtiene al sumar
$w_1 = 1+3i$ y $w_2 = \frac{1+i}{1-i}$.

b) Dados los números complejos $z_1 = \frac{2b+4i}{1+i}$ y $z_2 = \frac{b^2+2i}{i}$. Encontrá, si es posible, el o los valores de $b \in \mathbb{R}$ de forma tal que el número $z_1 + z_2$ sea un número real.

(13) Encuentren un número complejo z que verifique:

$$\left(\frac{4+2i}{1+i}\right) \cdot z = 5-5i$$

(14) Representen en el plano complejo:

a) Todos los $z \in \mathbb{C}$ que tengan el mismo módulo que la solución hallada en el ítem anterior.

b) Todos los $z \in \mathbb{C}$ que tengan el mismo argumento que la solución hallada en el ítem anterior.

(15) a) Representen en el plano complejo el siguiente conjunto:

$$\{z \in \mathbb{C} : -\frac{\pi}{2} \leq arg(z) \leq \frac{2\pi}{3} \wedge 1 \leq |z| \leq 3\}$$

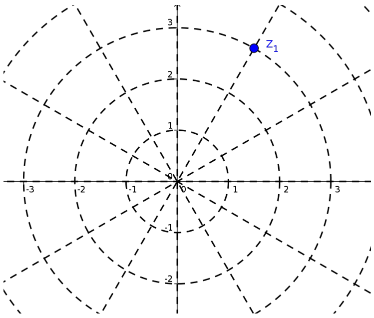
b) Representen en forma binómica y trigonométrica el número complejo $z = \frac{1+i}{1-i}$.

(16) a) Encuentren la forma trigonométrica del número complejo $z = \frac{1+i}{1-i}$.

b) Encuentren el valor de $z \in \mathbb{C}$ tal que $3(\cos(-\frac{\pi}{2}) + i\,\mathrm{sen}(-\frac{\pi}{2})) \cdot z = 3$.

(17) a) Sea z_1 el número complejo representado en el gráfico, encuentren cuánto vale el conjugado de z_1 y expresen al mismo en forma binómica y trigonométrica.

b) Encuentren el valor de $z_2 \in \mathbb{C}$ que cumpla $z_1 \cdot z_2 = -6$ y representen la solución hallada en forma binómica y trigonométrica.



(18) Representen gráficamente a los números complejos z que verfiquen:

$$|(1+i)z-(1+3i)| \leq 1$$

(19) Sea $z = (\frac{-1+\sqrt{3}i}{2})^n + (\frac{-1-\sqrt{3}i}{2})^n$. Pruben que z es igual a 2 si n es múltiplo de 3 y es igual a -1 si es cualquier otro número entero positivo.

(20) Sea $z = a + bi$ un número complejo, con a y b reales no nulos. Decidan cuales de los siguientes números son reales:

a) La suma de z y su conjugado.
b) La diferencia de z y su conjugado.
c) El producto entre z y su conjugado.
d) El cociente entre z y su conjugado.

(21) Decidan de cuál o cuáles de las siguientes ecuaciones el número $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ es una solución:

a) $1 + z + z^2 = 0$
b) $z + 2\bar{z} = |z|$
c) $\frac{1}{z} - z^2 = 0$

(22) Grafiquen en el plano complejo todos los números z que verifican $z^3 + z^{-3} = 0$.

(23) Definan conjugado $\bar{z}$ de un número complejo y demuestren que para todo par de complejos z y w se cumple:

a) $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$
b) $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$

Bibliografía

[1] Altman, Silvia; Comparatore, Claudia; Kurzrok, Liliana, MATEMÁTICA 7: MATRICES, Editorial Longseller, Buenos Aires, 2005.

[2] Anton, Howard, *Introducción al Álgebra Lineal*, Limusa Wiley, México D.F., 1994.

[3] Aragón, Adriana; Pinasco, Juan Pablo; Schifini, Claudio; Varela, Alejandro, *Introducción a la matemática para el Primer Ciclo Universitario*, Universidad Nacional de General Sarmiento, Los Polvorines, 2008.

[4] Carnelli, Gustavo et al, *Matemática para el aprestamiento universitario-1a ed-*, Univ. Nacional de General Sarmiento, Los Polvorines, 2007.

[5] Grossman, Stanley I.; Flores Godoy, José Job, *Álgebra lineal*, McGraw-Hill, México, 2012.

[6] Maestripieri, Alejandra et al, *Notas de Álgebra Lineal para el primer ciclo universitario*, Univ. Nacional de General Sarmiento, Los Polvorines, 2008.

[7] Marchetti de De Simone, Irene; García de Turner, Margarita, *Matemática, funciones y matrices*, A-Z editora, Buenos Aires, 2006

[8] Noble, Ben; Daniel, James W., *Álgebra Lineal aplicada*, Prentice-Hall Hispanoamericana, México, 1989.

[9] `www.geogebra.org/`

[10] `https://es.khanacademy.org/`

Índice general

UNIVERSIDAD NACIONAL DE MORENO

MATERIAL DE DISTRIBUCIÓN GRATUITA

ISBN 978-987-3700-55-2

Universidad Nacional de Moreno
Av. Bartolomé Mitre N° 1891, Moreno (B1744OHC), prov. de Buenos Aires, Argentina
(0237) 466-7186 / 1529 / 4530
(0237) 488-3151 / 3147 / 3473
(0237) 425-1786 / 1619
(0237) 462-8629
(0237) 460-1309
www.unm.edu.ar
www.facebook.com/unimoreno

UNM 2010
UNIVERSIDAD DEL BICENTENARIO ARGENTINO