UNIVERSIDAD NACIONAL DE MORENO

TALLER DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

EJERCICIOS

Curso de Orientación y Preparación Universitaria

COPRUN 2021


UNM

DEPARTAMENTO DE CIENCIAS APLICADAS Y TECNOLOGÍA

Directora - Decana
M. Liliana TARAMASSO a/c

INGENIERÍA EN ELECTRÓNICA
Coordinador - Vicedecano
Gabriel F.C. VENTURINO

LICENCIATURA EN GESTIÓN AMBIENTAL
Coordinadora-Vicedecana
M. Beatriz ARIAS a/c

ARQUITECTURA
Coordinador – Vicedecano
Daniel E. ETCHEVERRY

LICENCIATURA EN BIOTECNOLOGÍA
Coordinador - Vicedecano
Fernando C. RAIBENBERG

DEPARTAMENTO DE ECONOMÍA Y ADMINISTRACIÓN

Director - Decano
Pablo A. TAVILLA

LICENCIATURA EN RELACIONES DEL TRABAJO
Coordinadora-Vicedecana
Sandra M. PÉREZ

LICENCIATURA EN ADMINISTRACIÓN
Coordinador - Vicedecano
Marcelo A. MONZÓN

LICENCIATURA EN ECONOMÍA
Coordinador - Vicedecano
Alejandro L. ROBBA

CONTADOR PÚBLICO NACIONAL
Coordinador - Vicedecano
Alejandro A. OTERO

DEPARTAMENTO DE HUMANIDADES Y CIENCIAS SOCIALES

Director - Decano
Roberto C. MARAFIOTI

LICENCIATURA EN TRABAJO SOCIAL
Coordinadora - Vicedecana
M. Patricia JORGE (dyf)

LICENCIATURA EN COMUNICACIÓN SOCIAL
Coordinadora - Vicedecana
Adriana A. M. SPERANZA a/c

ÁREA DE EDUCACIÓN
Coordinadora-Vicedecana
Lucía ROMERO

TALLER DE
RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

EJERCICIOS

Curso de Orientación y Preparación Universitaria

COPRUN 2021

UNIVERSIDAD
NACIONAL
DE MORENO

Coll, Pablo

Taller de resolución de problemas : COPRUN 2018 : ejercicios / Pablo Coll ; Fernando Chorny. - 1ª ed. - Moreno : UNM Editora, 2017.
Libro digital, PDF

Archivo Digital: descarga y online
ISBN 978-987-3700-48-4

1. Matemática. 2. Resolución de Problemas. 3. Ejercicio. I. Coll, Pablo Título
CDD 510

Colección: Biblioteca COPRUN

Directora: Lorena DEMITRIO

Autor: Pablo COLL y Fernando CHORNY

Las imágenes que integran esta publicación pertenecen a Pablo COLL y Fernando CHORNY

1.ª Edición

Av. Bartolomé Mitre N.° 1891, Moreno
(B1744OHC),
Prov. de Buenos Aires, Argentina
(+54 237) 466-1529/4530/7186
(+54 237) 488-3147/3151/3473
(+54 237) 425-1619/1786
(+54 237) 460-1309
(+54 237) 462-8629
Interno: 3154
unmeditora@unm.edu.ar

ISBN (versión digital): 978-987-3700-48-4
La edición en formato digital de esta obra se encuentra disponible en:
http://www.unmeditora.unm.edu.ar/index.php/colecciones/biblioteca-coprun

PRESENTACIÓN

La Universidad Nacional de Moreno (UNM), creada en el año 2010, tiene como propósito promover la generación y transmisión de conocimientos, entendiendo el acceso a la Educación Superior como un derecho humano universal.

En este marco, la UNM ha elaborado el presente material didáctico para ser utilizado en el Curso de Orientación y Preparación Universitaria (COPRUN), y lo distribuye en forma gratuita, a fin de facilitar a sus ingresantes el material de estudio necesario para esta primera etapa.

El COPRUN es la puerta de acceso a la vida universitaria y su finalidad es acompañar a los ingresantes, brindarles herramientas y metodologías de trabajo que les permitan no solo acceder sino también permanecer en la Universidad. Pretende, asimismo, desarrollar la capacidad de interpretar y comunicar información, razonar creativamente, resolver problemas. En síntesis, generar confianza en las capacidades propias y dar instrumentos para que los alumnos puedan abordar y sortear las dificultades del aprendizaje universitario.

El Curso contempla mecanismos de evaluación basados en la asistencia y en el cumplimiento de las actividades prácticas señaladas por los docentes, y está compuesto por tres talleres: Taller de Resolución de Problemas, Taller de Lectoescritura y Taller de Ciencias; y el Seminario “Aproximación a la vida universitaria”.

El Taller de Resolución de Problemas presenta las modalidades de la construcción del conocimiento desde la lógica formal. El Taller de Lectoescritura aborda el desarrollo de habilidades de comprensión, comunicación y producción escrita. El Taller de Ciencias acerca a los alumnos a los principales métodos y conceptos que se ponen en juego en la producción del conocimiento científico. El seminario “Aproximación a la vida universitaria” apunta a crear el oficio de estudiante universitario a partir de encuentros de intercambio con docentes, no docentes y otros actores institucionales.

¡Quienes hacemos la UNM les damos la bienvenida a esta comunidad educativa!

La presente edición fue coordinada por la Dirección de Articulación, Orientación e Ingreso, a cargo de la Lic. Lorena Demitrio.

Secretaria Académica

Introducción

Palabras introductorias

El Taller de Resolución de Problemas (TRP) está pensado para acompañarte en tu preparación para los estudios universitarios, en particular para las materias de matemática que cursarás en tu carrera.

A medida que avances en el TRP –y luego en las cursadas de las materias– podrás identificar (tus docentes te ayudarán a hacerlo) si los conocimientos previos que traés de la escuela o de tus estudios anteriores te alcanzan para progresar en las materias o si necesitás reforzar algunos conceptos y el manejo de algunos procedimientos. Esto es así porque las materias están propuestas de una manera, pero la diversidad de experiencias previas de los distintos alumnos es muy grande y es tu tarea en el TRP identificar y comprender desde qué punto estás arrancando y prepararte, en consecuencia, tanto como necesites para comenzar a cursar las materias de matemática.

Es necesario que orientes tu estudio y tu preparación en dos direcciones:

(i) Comprender los problemas, saber cómo abordarlos, cómo comprender lo que se pide hacer, con qué ideas tratar de resolverlos, cómo decidir si la solución propuesta puede estar bien o no, cómo adaptar flexiblemente lo que uno conoce a la resolución de una situación que no es exactamente igual a las que uno conocía, etc.

(ii) Manejar recursos operatorios para llevar adelante las estrategias de resolución: despejar una incógnita en una ecuación, resolver operaciones con números, calcular el área de una figura geométrica, leer e interpretar un gráfico, etc.

A la primera dirección la podemos llamar **comprensión**. A la segunda, **habilidad**.

Aunque estas dos direcciones en realidad se superponen y conviven juntas, hemos intentado diferenciarlas para que puedas atenderlas por separado. Por eso tenemos dos cuadernillos, pensados para distintos momentos de la clase. En el otro cuadernillo las actividades están denominadas **«Problemas»** y se las supone más vinculadas a la comprensión. Mientras que en este cuadernillo las actividades están denominadas **«Ejercicios»** y se las supone más vinculadas a la habilidad.

Desde luego, la diferencia entre un ejercicio y un problema es muy subjetiva y lo que es un problema para uno puede ser un ejercicio para otro. El problema requiere para ser resuelto una idea original que no se ha tenido antes, pero que puede surgir a partir de lo que se conoce. Requiere **comprender** y diseñar de alguna manera cómo se usarán los conocimientos que se tienen, para dirigirse hacia una solución. El ejercicio, en cambio, requiere tener práctica en la realización de un procedimiento.

Un problema puede consistir en saber qué ecuación plantear para representar la información. El ejercicio consistiría en saber resolver esa ecuación, una vez planteada. Ninguna de las dos direcciones es suficiente por sí sola. Se complementan. Y es necesario que estudies y practiques para tener un profundo dominio de ambas. Eso es lo que te proponemos a partir de estos cuadernillos.

Es posible que el tiempo disponible durante el desarrollo del TRP no sea suficiente para que resuelvas todos los ejercicios de este cuadernillo. Pero si al cabo del desarrollo del TRP todavía no adquiriste la habilidad para resolverlos será importante que conserves el material, pues lo continuarás utilizando como complemento de las materias de matemática que vayas a cursar. Para poder estudiar y progresar en las materias de matemática de las carreras tendrías que ser capaz de resolver sin demasiadas dificultades los ejercicios de este cuadernillo. Utilizalos como una medida de tu nivel de preparación. Más adelante te iremos informando de los espacios que la Universidad ofrece para brindarte la ayuda que necesites.

Estructura del cuadernillo

El cuadernillo está organizado en **Unidades** con títulos similares a los del cuadernillo de Problemas (aunque no todas las unidades de Problemas tienen su correspondiente unidad de Ejercicios).

Algunos ejercicios están identificados con una estrellita (★). Se trata de ejercicios que están resueltos a modo de ejemplo en el Apéndice A. Su buen uso dependerá en parte de tu autodisciplina de estudio. Hay que intentar resolver los ejercicios recurriendo lo menos posible a mirar los ejemplos resueltos y mirarlos recién para comparar con lo que hayas hecho antes por tu cuenta. También hay que usarlos teniendo en claro que no hay una única manera de resolver un ejercicio. Eso significa que si tu resolución no es exactamente igual a la que aparece en el Apéndice A eso no significa que necesariamente sea incorrecta. Aunque, por supuesto, podría serlo. Saber utilizar los ejercicios resueltos de esta sección para decidir si tu resolución es correcta o no es también una habilidad que se entrena y se aprende.

En la introducción del Apéndice A (página 51) se explican algunos detalles más relacionados con el uso de dicha sección del cuadernillo.

Varios de los ejercicios, especialmente los de la **Unidad 1 Producción de fórmulas**, han sido tomados, adaptados y traducidos del inglés del libro [1] (ver Bibliografía). Se trata de un libro con ejercitación muy recomendable para esta etapa de la formación, por la variedad de ejercitación que presenta y por la importancia que le da al entrenamiento en esta dirección.

Ritmo de estudio

Este cuadernillo tiene algo más de 150 ejercicios. Si pretendieras resolverlos todos durante las seis semanas que dura el TRP, deberías resolver 25 ejercicios por semana; unos 4 ejercicios por día. Esto es muchísimo menos que la intensidad de estudio que se esperará de vos en las materias de las carreras. Por este motivo, la práctica con los ejercicios del cuadernillo es también un entrenamiento en el ritmo de estudio. Palabras similares encontrarás en el cuadernillo de problemas y otras seguramente en los cusdernillos y las indicaciones de tus docentes de los demás talleres del COPRUN. Seguramente servirá para ayudarte a tener noción del tiempo y el esfuerzo que lleva el aprendizaje y te permitirá decidir luego cuántas materias de la carrera te convendrá cursar. ¿Tengo tiempo para atenderlas a todas? ¿me puedo organizar con mis demás obligaciones, mi trabajo, mi familia? ¿No me conviene cursar al principio un número más reducido de materias hasta estar seguro de que las puedo seguir comprometidamente? Estas son preguntas que tu tránsito por el COPRUN y tus docentes te deberían ayudar a responder.

1. Producción de fórmulas

Ejercicio 1 En un torneo de fútbol los equipos reciben 3 puntos por ganar, 1 punto por empatar y ningún punto por perder.

a) Describan un método que permita calcular los puntos de un equipo que ganó a partidos, empató b partidos y perdió c partidos y úsenlo para calcular los puntos obtenidos por un equipo que ganó 7 partidos, empató 8 y perdió 4.

b) Escriban una fórmula más general que permita calcular los puntos del equipo que gano a partidos, empató b partidos y perdió c partidos, si por ganar se obtienen L puntos, por empatar se obtienen M puntos y por perder se obtienen N puntos.

Ejercicio 2

a) Describan la manera de calcular el $12\,\%$ de propina que se pagaría en un restorán y úsenlo para calcular la propina si la cuenta es de $\$450$ y si la cuenta es de $\$320$.

★b) Cambien el valor de la cuenta por la letra C y adapten el método para calcular en símbolos el $12\,\%$ de propina para esa cuenta cualquiera.

c) Cambien también el $12\,\%$ por un $N\,\%$ y adapten la fórmula para calcular el $N\,\%$ de propina si el valor de la cuenta en pesos es C.

Ejercicio 3

a) Describan la manera de calcular el importe total de una cuenta de restorán si se incluye el $10\,\%$ de propina y úsenlo para calcular el costo total si la cuenta es $\$530$ y si la cuenta es de $\$280$.

b) Cambien el valor de la cuenta por la letra C y adapten el método para calcular en símbolos el costo total con la propina del $10\,\%$ incluida.

c) Cambien también el $10\,\%$ por un $N\,\%$ y adapten la fórmula para calcular el costo total si la cuenta en pesos es C y se desea dejar una propina de un $N\,\%$.

Ejercicio 4 Escriban una expresión para calcular el costo de un vestido con el descuento indicado en cada caso.

★a) Descuento: $15\,\%$; precio del vestido: $\$P$.

b) Descuento: $D\,\%$; precio del vestido: $\$1500$.

c) Descuento: $18\,\%$; precio del vestido: $\$300$ menos que el precio de lista $\$P$.

Ejercicio 5 Para una fiesta se compran 30 botellas de gaseosa y 20 paquetes de papas fritas. Escriban una expresión para el costo total si el precio de las botellas en pesos es B y el de los paquetes de papas fritas es P.

Ejercicio 6 Escriban una expresión para calcular el costo de comprar B kilogramos de bananas y P kilogramos de papas, si el kilogramo de bananas cuesta $\$18$ y el de papas $\$12$.

Ejercicio 7 Juan tiene en un bolsillo a monedas de 10 centavos, b monedas de 25 centavos, c monedas de 50 centavos y d monedas de un peso. Escriban para cada caso una expresión que describa:

a) El número de monedas que tiene Juan.

b) El total de pesos que tiene Juan.

★c) El total de centavos que tiene Juan.

d) El total de monedas que tendría si cambia las monedas de 50 centavos por monedas de 10 y las de 10 centavos por monedas de 5.

Ejercicio 8

a) Elijan dos números, multiplíquenlos y también súmenlos. Luego calculen el promedio de los dos resultados que obtuvieron.

b) Llamen x a uno de los números e y al otro y escriban una expresión algebraica que represente los cálculos que hicieron.

Ejercicio 9 En cada uno de los casos escriban una única expresión que realice las operaciones indicadas:

a) Quitar x de 1, duplicar, sumar 3.

b) Quitar 1 de x, duplicar, sumar 3.

★c) Sumar 3 a x, quitarle el resultado a 1, duplicar.

d) Sumar 3 a x, duplicar, quitar 1 del resultado.

Ejercicio 10 Describan la secuencia de operaciones dada por cada par de expresiones y expliquen en qué se diferencian.

a) $p + \frac{q}{3}$ comparada con $\frac{p+q}{3}$

b) $3a + 4a^2$ comparada con $7a^3$

c) $\frac{\frac{2}{3}}{x}$ comparada con $\frac{2}{\frac{3}{x}}$

d) $3a + 4a^2$ comparada con $12a^3$

e) $a - (b + c)$ comparada con $a - b + c$

★f) $a - (b - c)$ comparada con $a - b - c$

Ejercicio 11 Listen la secuencia de operaciones que se describe en cada expresión:

a) $2(x + 1)$

b) $2x + 1$

★c) $1 - 3(M/2 + 4)$

d) $3 - 2(T + 5)$

Ejercicio 12 La impresora número 1 imprime H_1 hojas por minuto. La impresora número 2 imprime H_2 hojas por minuto. Cada una de las siguientes expresiones describe el número de hojas por minuto que imprime la impresora 3. En cada caso, escriban en palabras una frase que explique qué nos dice cada una de esas expresiones.

a) $H_1 + H_2$

b) $2H_1$

c) $\frac{1}{2}H_2$

d) $\frac{1}{2H_2}$

e) $H_1 - 25$

f) $\frac{H_1+H_2}{2}$

★g) $2(H_1 + H_2)$

h) H_2

Ejercicio 13

a) ¿Cuánto vale la expresión $a(2-x)+x(7+a)$ si es $x=5$ y $a=2$?

b) Desarrollen la expresión $a(2-x)+x(7+a)$ mediante la propiedad distributiva, hasta obtener una expresión equivalente, sin paréntesis.

c) ¿Cuánto vale la expresión obtenida en el ítem anterior, si es $x=5$ y $a=2$?

★**Ejercicio 14** Distribuyan y operen hasta obtener otra expresión de un solo término:

$$(3+m)a - a(3-m)$$

Ejercicio 15 Lean la siguiente explicación:

En la expresión algebraica $4(x+1)+5(2-x)$ la letra x representa un número.

Por ejemplo, si fuera $x=6$, la expresión pasaría a ser

$$4(6+1)+5(2-6)$$

que se puede reducir a un único número, operando. Contemos el número de cuentas que hay que hacer para llegar al resultado numérico:

1) $6+1=7$

2) $4 \cdot 7 = 28$

3) $2-6=-4$

4) $5 \cdot (-4) = -20$

5) $28+(-20) = 28-20 = 8$

El resultado final es 8 y hemos realizado 5 cuentas.

Volvamos ahora a la expresión original y operemos algebraicamente:

$$\begin{aligned} 4(x+1)+5(2-x) &= (4x+4)+(10-5x) \\ &\quad \text{(por propiedad distributiva)} \\ &= 4x+4+10-5x \\ &\quad \text{(por supresión de paréntesis)} \\ &= 14-x \\ &\quad \text{(por operaciones algebraicas)} \end{aligned}$$

Hemos obtenido la expresión equivalente $14-x$. Como antes, la x representa un número. Si fuera $x=6$ obtendríamos $14-6=8$, al igual que antes (eso es lo que pasa con las expresiones equivalentes), solo que ahora hemos realizado una sola cuenta: $14-6$, en vez de las 5 cuentas que tuvimos que hacer antes.

Por involucrar menos cuentas, decimos que $14-x$ es una expresión equivalente a $4(x+1)+5(2-x)$, pero **más reducida**. En toda esta guía, cuando se pide **reducir** una expresión lo que se quiere indicar es que deben operar algebraicamente hasta transformarla en otra equivalente que involucre menos cuentas, como se mostró en este ejemplo.

Ejercicio 16 Hallen una expresión equivalente a cada una de las siguientes, pero sin paréntesis:

a) $(2+5+4)(m+2)$

b) $(4+2)(x+3+y+5)$

★c) $(2x-3y)(5m-7n)$

d) $(a+2+x)(9-m)$

Ejercicio 17 Evalúen las siguientes expresiones en los valores de las variables que se indican.

a) $\dfrac{x-\frac{2}{3}}{x}; x=\frac{1}{2}$

b) $3x^2-2y^3; x=2; y=-1$

c) $-16t^2+64t+128; t=3$

d) $a^2-b^2; a=-b$

e) $(p+q)^2; p=2; q=5$

f) $p^2+q^2; p=2; q=5$

★g) $(0{,}5z+0{,}1w)/t;\ z=10;\ w=-100;\ t=-10$

h) $\pi r^2; r=\frac{5}{\sqrt{\pi}}$

i) $\dfrac{(B+b)h}{2}; B=5; b=\frac{2}{3}; h=0{,}5$

j) $d-(c-(c-d)); c=\frac{17}{13}; d=\frac{53}{19}$

k) $(1/4)(x+3)^2-1; x=-4$

l) $T+\frac{1}{T}+\frac{1}{T^2}; T=\frac{1}{3}$

Ejercicio 18 Decidan si las siguientes fórmulas son equivalentes en donde se encuentran definidas. Justifiquen.

a) $(a-b)^2$ y a^2-b^2

b) a^3-a^2 y $a^2(a-1)$

c) $\dfrac{-c+b}{-c}$ y $\dfrac{b}{c}$

d) $\dfrac{a-b}{c\cdot a}$ y $\dfrac{1}{c}-\dfrac{b}{c\cdot a}$

e) $(a+b)^3$ y a^3+b^3

f) $(x-2)^3$ y x^3-8

g) $(x-1).(x+2)$ y x^2+x-2

h) $4x+8$ y $4.(x+4)$

★i) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{x}{x+1}$ y $\dfrac{x+x^2+1}{(x+1)x}$

j) $\dfrac{3}{x^2-4}-\dfrac{x}{x+2}+1$ y $\dfrac{2x-1}{x^2-4}$

Ejercicio 19 Decidan, en cada caso, si alguna de las expresiones –en las que a, b, c y d pueden ser cualquier número– es equivalente a la dada:

$$\begin{tikzcd} & a-b\cdot c+b\cdot d \\ a-b\cdot(c+d) \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & a-b\cdot c-b\cdot d \\ & a-b\cdot c+d \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & a-b\cdot c+b\cdot d \\ a-b\cdot(c-d) \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & a-b\cdot c-b\cdot d \\ & a-b\cdot c-d \end{tikzcd}$$

Ejercicio 20 Reduzcan las siguientes expresiones algebraicas:

a) $5a(x-y)+5a(y-x)$

b) $2m(z+p)-2m(z-p)$

★c) $3y-3(y-2)$

Ejercicio 21 Resuelvan la siguiente ecuación.

$$3x-6=3\cdot 7$$

Ejercicio 22 Resuelvan la siguiente ecuación por dos caminos distintos:

$$2\,(x+4) = 8+6$$

a) Usando la propiedad distributiva.

b) Sin usarla.

Ejercicio 23 Realicen las siguientes cuentas para los distintos valores de a:

Si $a=2$	Si $a=5$	Si $a=-2$	Si $a=\frac{2}{3}$
$a+a=$	$a+a=$	$a+a=$	$a+a=$
$a\cdot a=$	$a\cdot a=$	$a\cdot a=$	$a\cdot a=$
$a-a=$	$a-a=$	$a-a=$	$a-a=$
$a\div a=$	$a\div a=$	$a\div a=$	$a\div a=$
$a^2=$	$a^2=$	$a^2=$	$a^2=$
$2a=$	$2a=$	$2a=$	$2a=$

Ejercicio 24 Decidan si las siguientes igualdades son verdaderas o falsas para cualquier valor de a. Justifiquen.

- $a+a=a^2$
- $a+a=2a$
- $a-a=0$
- $a\cdot a=a^2$
- $a\cdot a=2a$
- $a\div a=0$

★c) $a\div a=1$

Ejercicio 25

a) ¿Qué valores pueden tomar a y b para que sea $a\cdot b=0$?

b) Resuelvan las siguientes ecuaciones:

(i) $\left(x+\frac{3}{2}\right)(x-4)=0$

(ii) $(x+5)\left(x+\frac{2}{7}\right)\left(x-\frac{8}{3}\right)=0$

(iii) $(x-2)\left(x^2+1\right)=0$

(iv) $x^5-x^3=0$

(v) $3x^2=2x^2$

(vi) $\dfrac{1}{x}-\dfrac{4}{x^2}=0$

(vii) $\sqrt{x+1}-\sqrt{x+6}=1$

(viii) $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=0$

Ejercicio 26 Encontrá todos los valores de w, z, x e y que cumplen con las igualdades.

a) $3w-w=2w$

b) $y-3y=2y$

c) $3x-1=2x$

d) $1-3z=-2$

★e) $x-3x=-2x$

f) $5-3y=2$

Ejercicio 27

a) Expliquen por qué $a^3\cdot a^5=a^8$.

b) Expliquen por qué $a^7/a^3=a^4$.

c) Calculen las siguientes potencias:

(i) $a^3\cdot a^5\cdot a\cdot a^6$

(ii) $(a^{15}/a^6)/a^4$

(iii) $a^{15}/(a^6/a^4)$

(iv) $a^{10}/\left(a^2\cdot a^4\right)$

(v) $\left(a^5/a\right)\cdot\left(a^3/a^2\right)\cdot\left(a^9/a^7\right)$

(vi) $a^{x+y}\cdot a^{y-z}\cdot a^2$

Ejercicio 28 Resuelvan las siguientes ecuaciones aplicando las propiedades de la potenciación:

★a) $x^2 \cdot x^3 \cdot x^4 = \left(3^3\right)^3$ b) $x^{11}/x^4 = 5^2 \cdot 5^5$ c) $3 \cdot x^7/x^3 = 3 \cdot 2 \cdot 2^3$

Ejercicio 29 Desarrollen:

a) $(a+b)^2$ b) $(a-b)^2$ c) $(a+3b)^2$

d) $(2ab+7ac)^2$ ★e) $\left(2m-3n^2\right)^2$ f) $\left(5a-b^2\right)\left(b^2+5a\right)$

Ejercicio 30 Identifiquen cada cálculo de la columna de la izquierda con uno de la columna de la derecha que dé el mismo resultado.

- $20-(15-7)$
- $20-(15+7)$
- $20+(15-7)$
- $20+(15+7)$

- $20+15+7$
- $20-15-7$
- $20-15+7$
- $20+15-7$

Ejercicio 31 Escriban, en cada caso, una expresión equivalente, sin paréntesis:

a) $A-(B-C)$ b) $A+(B-C)$

c) $A+(B+C)$ d) $A-(B+C)$

Ejercicio 32 Identifiquen cada cálculo de la columna de la izquierda con uno de la columna de la derecha que dé el mismo resultado.

- $3-(-2)\cdot(5-9)$
- $3-2\cdot(5-9)$
- $3-(-2)\cdot(-5-9)$
- $3+(-2)\cdot(-5+9)$

- $3-2\cdot(5+9)$
- $3+2\cdot(9-5)$
- $3+10+18$
- $3+2\cdot(5-9)$

Ejercicio 33 Escriban, en cada caso, una expresión equivalente, sin paréntesis:

a) $A-D\cdot(B-C)$ b) $A+D\cdot(B-C)$ c) $A+D\cdot(B+C)$

d) $A-D\cdot(-B+C)$ e) $A+(-D)\cdot(-B+C)$ f) $A-(-D)\cdot(B+C)$

Ejercicio 34 Resuelvan las siguientes ecuaciones:

a) $-4+x/(-5)=(-1)(-3)$

b) $x+5=(-3)(-4)+3\cdot 8$

★c) $(x-3)^2 = x^2-3$

d) $2(x+3)=\sqrt{(-12)(-2)+1}+(-3)$

★e) Verifiquen que cada solución obtenida es –efectivamente– una solución, reemplazando el valor de x en la ecuación para constatar que resulte una igualdad (¡Esto hay que hacerlo siempre! Ya basta de preguntarle al profesor "*¿Está bien?*")

Ejercicio 35 Prueben que: $(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

Ejercicio 36 Resuelvan las siguientes ecuaciones:

a) $\frac{2}{3} \cdot x = \frac{3}{2}$

b) $\frac{2}{3}/x = \frac{3}{2}$

c) $x/\frac{2}{3} = \frac{3}{2}$

d) $\frac{2}{3} \cdot x = 1$

e) $\frac{2}{3} \cdot x = 1$

Ejercicio 37 Calculen a^{-1} si

a) $a = 2$

b) $a = 1$

c) $a = -1$

d) $a = 0,4$

e) $a = -\frac{1}{3}$

f) $a = \frac{8}{7}$

★g) $a = -\frac{5}{8}$

Ejercicio 38 Resuelvan las siguientes ecuaciones:

a) $\frac{7}{9}x - \frac{1}{3} = -1$

b) $2^{-1}\left(x + 0,\frac{2}{9}\right) = 1^{-1}$

Ejercicio 39 Renueven la yerba del mate y resuelvan estas ecuaciones.

a) $4(x-6) = 24$

b) $4x - 6 = 24$

c) $3(x-12) : 4 = 9$

d) $3x - 12 : 4 = 9$

e) $4x + (-2x+3)(-3) = -4x - 51$

f) $(2-x) : (-5) = -1$

g) $\frac{2-x}{-5} = -1$

h) $2x - 7 = 5x + 2$

i) $3 + 4x = 4x + 5$

j) $-3x + 6 = x - 10$

k) $5x - 2x + 1 = x - 11$

l) $x + 2x - 2 = 3x - 2$

★m) $x + 8 = 2x - 8 + 3x$

n) $6x + 7 - 2x = -x - 8$

ñ) $-9 - 7x = 6 - 2x - 10$

o) $-4x + 3 - 7x = -9 - 8x$

Ejercicio 40 Un estudiante resolvió la ecuación $(2-x) : (-5) = -1$ del problema anterior y obtuvo como solución $x = 7$. Para verificar si la solución era correcta reemplazó ese valor en la ecuación, de la siguiente manera:

$$(2-x) : (-5) = -1 \xrightarrow{(x=7)} (2-7) : (-5) = \ldots$$

a) Completen el cálculo anterior y decidan si la solución $x = 7$ del estudiante es correcta (y expliquen por qué).

b) Utilicen el mismo recurso para verificar las soluciones obtenidas en todas las demás ecuaciones del Problema anterior.

2. Fracciones

Ejercicio 41 Escriban tres fracciones equivalentes a cada una de las dadas:

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{3}{7}$ c) $\frac{3}{2}$ d) $\frac{5}{8}$ e) $\frac{7}{7}$ f) $\frac{8}{5}$

g) $\frac{7}{9}$ h) $\frac{6}{9}$ i) $\frac{1200}{7000}$ ★j) $\frac{10}{25}$ k) $\frac{18}{72}$ l) $\frac{101}{103}$

Ejercicio 42 Escriban las fracciones irreducibles de:

a) $\frac{4}{8}$ b) $\frac{15}{25}$ c) $\frac{12}{16}$ d) $\frac{22}{33}$ e) $\frac{143}{187}$ f) $\frac{42}{49}$

g) $\frac{70}{91}$ h) $\frac{21}{98}$ i) $\frac{22}{23}$ ★j) $\frac{2772}{4158}$ k) $\frac{11}{132}$ l) $\frac{8281}{6545}$

Ejercicio 43 Deduzcan el número x que falta, en cada caso:

a) $\frac{3}{x} = \frac{4}{8}$ b) $\frac{x}{15} = \frac{4}{10}$ c) $\frac{3}{16} = \frac{15}{x}$ d) $\frac{4}{5} = \frac{x}{4}$ e) $\frac{x}{7} = \frac{36}{35}$

f) $\frac{24}{2} = \frac{x}{3}$ g) $\frac{x}{3} = \frac{24}{2}$ ★h) $\frac{2}{24} = \frac{3}{x}$ i) $\frac{5}{60} = \frac{3}{x}$ j) $\frac{84}{7} = \frac{3}{x}$

k) $\frac{1}{x} = \frac{8}{7}$ l) $\frac{x}{24} = \frac{x}{7}$ m) $\frac{x}{31} = \frac{x}{31}$ n) $\frac{24}{x} = \frac{7}{x}$ ñ) $\frac{24}{2} = \frac{x^2}{3}$

Ejercicio 44 Reescriban cada fracción como un entero más una fracción mayor que 0 menor que 1.

a) $\frac{32}{3}$ b) $\frac{23}{2}$ c) $\frac{178}{10}$ ★d) $\frac{178}{5}$ e) $\frac{60}{7}$

f) $\frac{313}{314}$ g) $\frac{-10}{7}$ h) $\frac{n+1}{n}$ i) $\frac{5n+3}{n}$ j) $\frac{5n+3}{2n}$

Ejercicio 45 Para cada ítem del ejercicio anterior calculen la fracción que hay que sumarle para llegar al entero más próximo.

Ejercicio 46 Decidan cuál de los dos números es menor en cada caso:

a) $\frac{13}{7}$ y $\frac{14}{8}$ b) $\frac{20}{21}$ y $\frac{21}{22}$ c) $\frac{100}{21}$ y $\frac{50}{11}$ d) $\frac{100}{21}$ y $\frac{51}{11}$

e) $\frac{13}{7}$ y $\frac{13+10}{7+10}$ ★f) $\frac{13}{7}$ y $\frac{13-5}{7-5}$ g) $\frac{n+1}{n}$ y $\frac{n}{n+1}$ h) $\frac{13}{7}$ y $\frac{13+n}{7+n}$

Ejercicio 47 Identifiquen cuáles de estas fracciones son equivalentes entre sí.

a) $\frac{12}{7}$ b) $\frac{2}{3}$ c) $\frac{1}{13}$ d) $\frac{5}{8}$ e) $\frac{2}{11}$ f) $\frac{9}{6}$

g) $\frac{11}{143}$ h) $\frac{6}{9}$ i) $\frac{1200}{7000}$ j) $\frac{1011}{1031}$ k) $\frac{26}{143}$ l) $\frac{101}{103}$

Ejercicio 48 Encuentren en cada caso un número intermedio, entre los que se indican:

a) $\frac{1}{6}$ y $\frac{3}{5}$ b) $\frac{3}{5}$ y $\frac{4}{5}$ c) $\frac{2}{3}$ y $\frac{3}{4}$ d) $\frac{10}{60}$ y $\frac{30}{50}$ ★e) $\frac{12}{18}$ y $\frac{18}{24}$

f) $\frac{5}{4}$ y $\frac{4}{3}$ g) $\frac{13}{11}$ y $\frac{17}{19}$ h) $\frac{21}{32}$ y $\frac{33}{44}$ i) $\frac{5}{13}$ y $\frac{35}{91}$ j) $\frac{17}{19}$ y $\frac{89}{97}$

Ejercicio 49 Resuelvan las siguientes operaciones:

a) $\frac{1}{5}+\frac{2}{5}$ b) $\frac{4}{5}+\frac{2}{5}$ c) $\frac{1}{7}+\frac{5}{7}$

d) $\frac{1}{7}+\frac{5}{7}+\frac{3}{7}$ e) $\frac{5}{4}+\frac{5}{2}$ f) $\frac{2}{3}+\frac{5}{2}$

g) $\frac{2}{7}+\frac{5}{3}$ ★h) $\frac{2}{3}+\frac{5}{7}$ i) $\frac{2}{7}+\frac{5}{3}$

j) $2+\frac{1}{7}+\frac{5}{3}$ k) $\frac{1}{4}+\frac{5}{3}+\frac{2}{7}$ l) $\frac{3}{8}-\frac{5}{3}+\frac{3}{4}-1$

Ejercicio 50 Resuelvan las siguientes ecuaciones:

a) $x+\frac{3}{4}=\frac{5}{2}$ ★b) $\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}=\frac{7}{2}$ c) $x-\frac{3}{2}=1$

d) $4x+\frac{2}{5}=6$ e) $\frac{7}{6}x-4=-3$ f) $-\frac{1}{5}x+\frac{1}{2}=2$

g) $\frac{4}{5}x-\frac{9}{2}x=8$ h) $4-\frac{1}{3}=\frac{2}{5}x$ i) $\frac{x}{4}+\frac{1}{5}=\frac{2}{3}x$

Ejercicio 51 Calculen fracciones que sean el doble, el tríple y la quinta parte de las siguientes:

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{3}{7}$ c) $\frac{3}{2}$ d) $\frac{5}{8}$ e) $\frac{7}{7}$ f) $\frac{8}{5}$

g) $\frac{7}{9}$ h) $\frac{6}{9}$ i) $\frac{1200}{7000}$ j) $\frac{10}{25}$ k) $\frac{18}{72}$ l) $\frac{101}{103}$

Ejercicio 52 Calculen escribiendo el resultado como una fracción:

a) $\frac{1}{2}+1$ b) $\frac{3}{7}+1$ c) $\frac{3}{2}+2$ d) $\frac{17}{7}+2$

e) $\frac{17}{7}-2$ f) $\frac{13}{8}-1$ g) $\frac{7}{9}+2$ h) $\frac{6}{9}+1$

i) $\frac{1200}{7000}+2$ j) $\frac{6}{9}+6$ k) $\frac{6}{9}+9$ l) $\frac{1200}{7000}+7000$

m) $\frac{101}{103}-1$ n) $\frac{101}{103}+1$ ñ) $\frac{101}{103}+100$ o) $\frac{103}{101}+9$

Ejercicio 53 ¿Entre qué números enteros consecutivos se encuentrán las siguientes fracciones? Indicá de cuál de los dos está más cerca.

a) $\frac{7}{2}$ b) $\frac{13}{7}$ c) $\frac{31}{17}$ d) $\frac{53}{8}$ e) $\frac{97}{11}$ f) $\frac{87}{5}$

g) $\frac{67}{9}$ h) $\frac{71}{13}$ ★i) $\frac{6700}{900}$ j) $\frac{7}{25}$ k) $\frac{25}{7}$ l) $\frac{51}{103}$

Toda fracción distinta de 0 tiene una inversa, es decir, una fracción que multiplicada por ella da por resultado 1. Por ejemplo, el inverso de $\frac{2}{3}$ es $\frac{3}{2}$ porque $\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}=1$. Otro ejemplo: el inverso de 5 es $\frac{1}{5}$, porque $5\cdot\frac{1}{5}=1$. En general, la fracción inversa de $\frac{a}{b}$ es $\frac{b}{a}$, porque $\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}=1$. Se suele usar la notación a^{-1} para indicar el inverso de a. De manera que $a\cdot a^{-1}=1$. En el caso de fraciones $\frac{a}{b}$ la inversa $(\frac{a}{b})^{-1}$ será igual a $\frac{b}{a}$ es decir $(\frac{a}{b})^{-1}=\frac{b}{a}$.

Ejercicio 54 Calculen el inverso multiplicativo de los siguientes números racionales:

a) $\left(-\frac{3}{4}\right)^{-1}$ b) $\left(\frac{3}{7}\right)^{-1}$ c) $\left(\frac{17}{3}\right)^{-3}$ d) $\left(\frac{1}{25}\right)^{-2}$

Ejercicio 55 Decidan cuáles de las siguientes notaciones representan el mismo número:

a) $\frac{1}{\frac{2}{5}}$ b) $\frac{1}{\frac{1}{\frac{2}{5}}}$ c) $\left(\frac{2}{5}\right)^{-1}$

d) $\frac{5}{2}$ e) $\left(\frac{5}{2}\right)^{-1}$ f) $-\left(\frac{2}{5}\right)^{1}$

La mitad de 40 es $40:2=20$. Pero también es $40\cdot\frac{1}{2}=20$. Calcular 40 dividido 2 es lo mismo que multiplicar 40 por el inverso de 2. En general: dividir una fracción por otra es multiplicar la primera por la inversa de la segunda:

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}$$

Ejercicio 56 Resuelvan mentalmente.

a) $\frac{3}{4} - \left(\frac{5}{3} + \frac{4}{5}\right)$ b) $4 - \left(\left(\frac{4}{3} - \frac{5}{4}\right) + \left(-\frac{3}{6}\right)\right)$ c) $\left(\left(\frac{2}{3} - \left(\frac{1}{2} + 2\right)\right) - \frac{2}{5}\right)$

d) $1 - \left(\left(\frac{5}{12} - \frac{12}{5}\right) - \left(-\frac{1}{30}\right)\right)$ e) $\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right)$ f) $\frac{2}{3} - \left(\frac{1}{2} + 2\right) - \frac{2}{5}$

Ejercicio 57 Utilizando los recursos que crean convenientes:

a) Escriban una lista de 5 números mayores que 2 y menores que 8, ordenada de menor a mayor.
b) Escriban una lista de 5 fracciones mayores que 2 y menores que 8, ordenada de menor a mayor.
c) Escriban una lista de 5 números mayores que 0 y menores que 1, ordenada de menor a mayor.
d) Escriban una lista de 12 números mayores que 0 y menores que 1, ordenada de menor a mayor.
e) Escriban una lista de 5 fracciones mayores que 0 y menores que 1, ordenada de menor a mayor.
f) Escriban una lista de 12 fracciones mayores que 0 y menores que 1, ordenada de menor a mayor.
g) Escribí una lista de 5 números mayores que $\frac{1}{3}$ y menores que $\frac{2}{3}$, ordenada de menor a mayor.
h) Escriban una lista de 5 fracciones mayores que $\frac{1}{3}$ y menores que $\frac{2}{3}$, ordenada de menor a mayor.

Ejercicio 58 Escriban el desarrollo decimal de los siguientes números racionales, prueben hacerlo mentalmente y si no se sale dividiendo “a mano” (sin calculadora).

a) $\frac{18}{5}$ b) $\frac{3}{20}$ c) $\frac{42}{35}$ d) $\frac{7}{100}$

e) $\frac{4}{5}$ f) $\frac{3}{12}$ g) $\frac{91}{14}$ h) $\frac{77}{1000}$

Ejercicio 59 Encuentren una fracción $\frac{a}{b}$ irreducible, cuyo desarrollo decimal sea el que se indica en cada caso. (Nota: por convención de notación las cifras del desarrollo decimal que aparecen abarcadas por un trazo horizontal forman período)

a) $0,275$ b) $6,24$ c) $6,04$ d) $6,004$

e) $0,275$ f) $0,\overline{3}$ ★g) $0,\overline{34}$ h) $0,3\overline{4}$

i) $1,\overline{3}$ j) $2,\overline{34}$ k) $3,3\overline{4}$ l) $0,\overline{9}$

Ejercicio 60 Ordenen los siguientes números de menor a mayor.

a) $3,149 \quad 3,2 \quad 3,15 \quad 3,100 \quad 3,199$
b) $1,664 \quad 1,6 \quad 1,700 \quad 1,66 \quad 1,070 \quad 1,70$
c) $2,71 \quad 2,72 \quad 1,700 \quad 1,66 \quad 1,070 \quad 1,70$

Ejercicio 61 Completen el espacio en blanco con una cifra, de modo que los números queden ordenados de menora mayor. ¿Es posible que haya más de una solución? Si la respuesta fuera positiva, listen todas las posibles. ¿Cómo pueden estar seguros de que están todas las posibles?

a) $0,\ldots 8 \quad 0,1\ldots 8 \quad 1,1\ldots \quad 1,1\ldots 1 \quad \ldots,2 \quad 1,\ldots 7$
b) $0,\ldots 5 \quad 0,1\ldots 8 \quad 1,2\ldots \quad 1,8\ldots \quad \ldots,9 \quad 3,\ldots 7$
c) $0,\ldots 5 \quad 0,1\ldots 8 \quad 1,\ldots 1 \quad 2,8\ldots \quad \ldots,6 \quad 2,\ldots 7$

Ejercicio 62 Coloquen la coma a cada uno de los siguientes números para que queden ordenados de mayor a menor. ¿Es posible que haya más de una solución? Si la respuesta fuera positiva, listen todas las posibles. ¿Cómo pueden estar seguros de que están todas las posibles?

a) $1234 \quad 567 \quad 8910 \quad 1112 \quad 1314$

b) $9876 \quad 543 \quad 2101 \quad 2345 \quad 6789$

c) $1111 \quad 5555 \quad 3231 \quad 4564 \quad 3577$

Ejercicio 63 Sumen los siguientes números para obtener un número decimal.

a) $31 \quad \frac{7}{10} \quad \frac{31}{10000} \quad 0,06$

b) $\frac{4}{50} \quad 1,1 \quad \frac{7021}{10000} \quad 1,01$

3. Tablas y gráficos

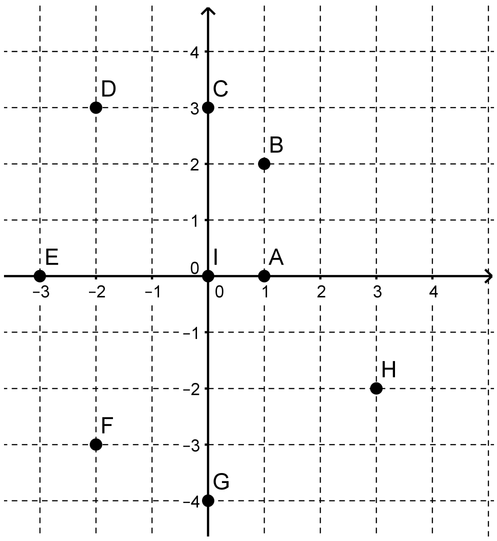
Ejercicio 64 a) Ubicá los siguientes puntos en el plano cartesiano y calculá el área de la figura formada si unimos todos los puntos mediante segmentos de recta, siguiendo el orden $ABCDA$.

(i) $A = (1, 4)$ (ii) $B = (1, 7)$

(iii) $C = (5, 7)$ (iv) $D = (5, 4)$

b) ¿Qué pasaría si en lugar de marcar el punto $(5, 4)$ marcamos el punto $(5, 1)$? ¿Qué figura queda formada? ¿Podemos calcular el área de la nueva figura? Si lo considerás posible, calculá el área.

Ejercicio 65 En la figura se muestra un plano cartesiano y en él están marcados algunos puntos. ¿Cuáles son las coordenadas x e y de cada uno de los puntos?



Ejercicio 66 Realicen cada una de las construcciones, respetando en orden los pasos indicados:

a) (i) Definan un punto A cualquiera, inventando sus coordenadas.
   (ii) Definan, dando sus coordenadas, puntos B, C y D, de manera que $ABCD$ sea un rectángulo con un lado que mida 3 unidades y otro que mida 4 unidades.
   (iii) Tracen las diagonales del rectángulo.
   (iv) Escriban las coordenadas del punto E donde se cruzan las dos diagonales.
   (v) Calculen el área del rectángulo $ABCD$.

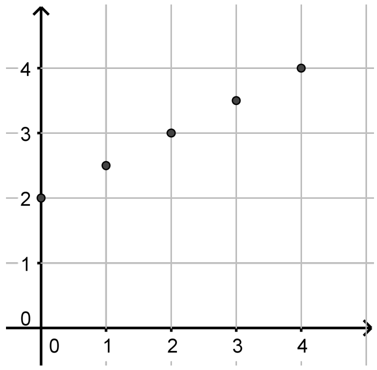
b) (i) Construyan un nuevo rectángulo que cumpla las siguientes condiciones:
   - El único vértice en común con el rectángulo anterior sea el punto A.
   - El área sea igual a la de $ABCD$.
   (ii) Escriban las coordenadas de los vértices del nuevo rectángulo.

Ejercicio 67 El gráfico muestra puntos correspondientes a una tabla

x	0		2	3		5
$f(x)$		2,5			4	

a) Completen la tabla con la información del gráfico y el gráfico con la información de la tabla.

b) Escriban una posible fórmula para esta tabla.

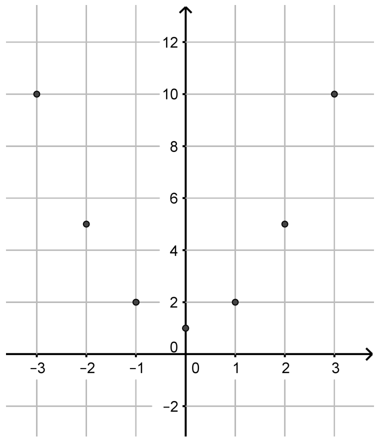


★**Ejercicio 68** El gráfico muestra puntos correspondientes a una tabla

x	-3	-2	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3	
$f(x)$	10		2	1			5		5

a) Completen la tabla con la información del gráfico y el gráfico con la información de la tabla.

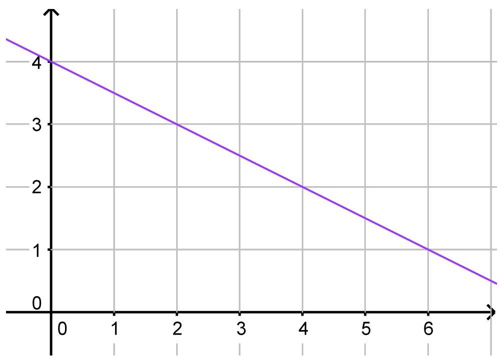
b) Escriban una posible fórmula para esta tabla.



Ejercicio 69

a) Construyan una tabla de valores a partir del siguiente gráfico.

b) Escriban una posible fórmula para esta tabla.



Ejercicio 70

a) Construyan un gráfico a partir de la siguiente tabla de valores.

b) Escriban una posible fórmula para esta tabla.

x	0	$0,5$	1	$1,5$	2	$2,5$
$f(x)$	1	2	3	4	5	6

Ejercicio 71 Comparen los ejercicios 69 y 70 y expliquen:

a) ¿Cuál de los dos les resultó más simple? ¿Por qué creen que fue así?

b) Expliquen cómo podrían usar la reflexión de la pregunta anterior para trabajar con los problemas de tablas, gráficos y fórmulas.

Ejercicio 72 Consideren las funciones dadas por: $f(x) = \frac{x}{2} - 1 \qquad g(x) = x^2 - 3$

a) Evalúen f y g para $x = 7$.

★b) Encuentren –si existe– un valor de x positivo tal que $f(x) > g(x)$.

c) Encuentren –si existe– un valor de x negativo tal que $f(x) > g(x)$.

d) Encuentren –si existe– un valor de x positivo tal que $f(x) < g(x)$.

e) Encuentren –si existe– un valor de x negativo tal que $f(x) < g(x)$.

Ejercicio 73 Si $f(x) = (12 - x)^2 - (x - 1)^3$, calculen:

a) $f(2)$

b) $f(5)$

c) $f(0)$

d) $f(-1)$

Ejercicio 74 Si $g(x) = 2x^2 + 7x + 5$, calculen:

a) $g(3)$

b) $g(a)$

c) $g(2a)$

d) $g(-2)$

Ejercicio 75 Consideren las funciones dadas por:

$$f(x) = \frac{2x+1}{3-5x} \qquad g(t) = \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}$$

Calculen:

a) $f(0)$

b) $g(0)$

c) $g(-1)$

d) $f(10)$

e) $f(1/2)$

f) $g(\sqrt{8})$

Ejercicio 76 Lean la información de la tabla y completen los valores que faltan:

a) $g(0) = \square$

b) $g(\square) = 0$

c) $g(-5) = \square$

d) $g(\square) = -5$

y	-10	-5	0	5	10
$g(y)$	-5	0	5	10	-10

Ejercicio 77 Lean la información de la tabla y completen los valores que faltan:

a) $h(0) = \square$

b) $h(\square) = 0$

c) $h(-2) = \square$

d) $h(\square) = -2$

t	-3	-2	-1	0	1	2	3
$h(t)$	-1	0	-3	-2	-1	-2	0

Ejercicio 78 Consideren la función dada por $f(x) = x^2 - x$.

★a) ¿Es lo mismo, para cualquier valor de x, calcular $f(2x)$ que calcular $2f(x)$?

b) ¿Es lo mismo, para cualquier valor de x, calcular $\frac{1}{2}f(x)$ que calcular $\frac{f(x)}{2}$?

c) ¿Es lo mismo, para cualquier valor de x, calcular $f(x+1)$ que calcular $f(x)+1$?

d) ¿Es lo mismo, para cualquier valor de x, calcular $f(x+1)$ que calcular $f(x)+f(1)$?

Ejercicio 79 Consideren otra vez la función dada por $f(x) = x^2 - x$.

★a) ¿Es lo mismo, para algún valor de x, calcular $f(2x)$ que calcular $2f(x)$?

b) ¿Es lo mismo, para algún valor de x, calcular $\frac{1}{2}f(x)$ que calcular $\frac{f(x)}{2}$?

c) ¿Es lo mismo, para algún valor de x, calcular $f(x+1)$ que calcular $f(x)+1$?

d) ¿Es lo mismo, para algún valor de x, calcular $f(x+1)$ que calcular $f(x)+f(1)$?

Ejercicio 80 Comparen lo ejercicios 78 y 79 y expliquen en qué se diferencian basando la explicación en:

a) La construcción de tablas.

b) La construcción de gráficos.

c) El desarrollo de cálculos algebraicos.

Ejercicio 81 Cada una de las siguientes funciones se puede escribir en la forma $C(t) = kt$, donde t es la variable y k es una constante. Háganlo e indiquen cuál es la expresión de k en cada caso.

★a) $C(t) = 5t + rt$ b) $C(t) = \frac{-t}{10}$ c) $C(t) = t(t+1) - t(t-1)$

Ejercicio 82 Evalúen cada una de las funciones dadas en los valores indicados para la variable y decidan en cuál de ellos el valor es máximo. Luego expliquen la conclusión obtenida interpretando la fórmula de cada función.

a) $f(x) = 9 - x$ para $x = 1$ y $x = 3$

b) $g(a) = a - 2$ para $a = -5$ y $a = -2$

c) $C(p) = \frac{-p}{5}$ para $p = 100$ y $p = 200$

d) $h(t) = \frac{t}{5}$ para $t = 4$ y $t = 6$

Ejercicio 83 Consideren la función $g(x) = 7567 - x$

a) Ordenen de menor a mayor los siguientes números: $g(354)$, $g(3450)$, $g(-354)$ y $g(-350)$.

b) Ordenen de menor a mayor los siguientes números: $g\left(\frac{1}{518}\right)$, $g\left(\frac{1}{815}\right)$, $g\left(-\frac{1}{267}\right)$, $g\left(\frac{1}{267}\right)$.

Ejercicio 84 Si $f(t) = \frac{t}{2} + 7$, determinen si las siguientes expresiones son o no equivalentes.

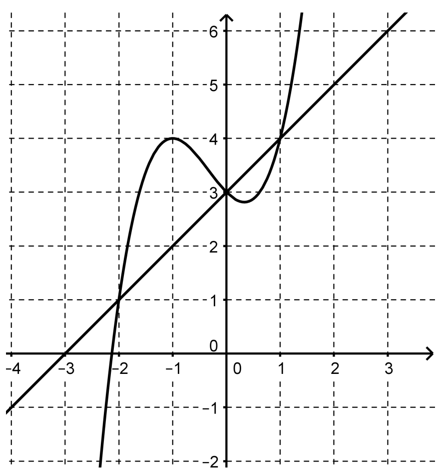
a) $\frac{f(t)}{3}$ y $\frac{1}{3}f(t)$

b) $f(t^2)$ y $(f(t))^2$

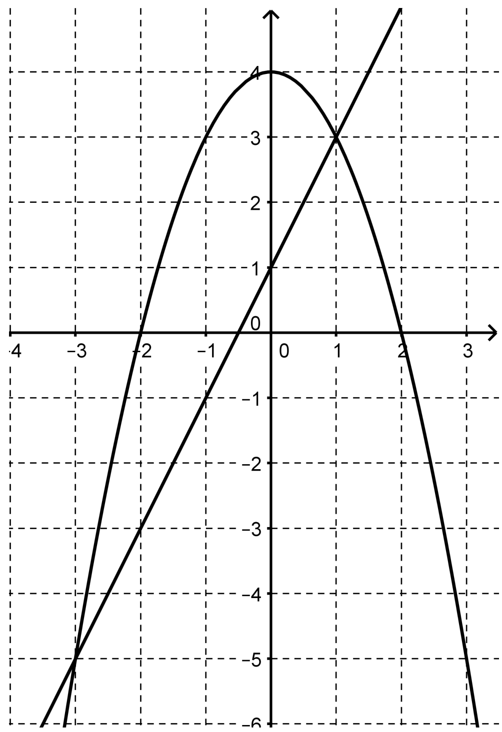
c) $2f(t)$ y $f(2t)$

d) $f(4t^2)$ y $f((2t)^2)$

★**Ejercicio 85** La figura muestra los gráficos de las funciones
$f(x) = x^3 + x^2 - x + 3$ y $g(x) = x + 3$
¿Qué soluciones tiene la ecuación
$x^3 + x^2 - x + 3 = x + 3$?



Ejercicio 86 La figura muestra los gráficos de las funciones
$h(x) = -x^2 + 4$ y $t(x) = 2x + 1$
¿Qué soluciones tiene la ecuación
$h(x) = t(x)$?



Ejercicio 87 Las poblaciones en el año t de dos pueblos están dadas por las funciones:

Pueblo A: $P(t) = 600 + 100(t - 2000)$

Pueblo B: $Q(t) = 200 + 300(t - 2000)$

¿En qué año los dos pueblos tenían la misma población?

a) Planteen una ecuación que permita buscar la respuesta.
b) Elijan una de las estrategias que se porponen a continuación y utilícenla para responder la pregunta:
   (i) Construir una tabla que registre las poblaciones de ambas ciudades en distintos años.
   (ii) Construir en un mismo sistema de coordenadas los gráficos de las dos funciones.
   (iii) Resolver algebraicamente la ecuación.
c) Elijan una de las estrategias distinta a la que eligieron en el punto b) y utilícenla para llegar a la misma conclusión por otro camino, así validan el resultado obtenido.

Ejercicio 88 Piensen mirando hacia atrás:

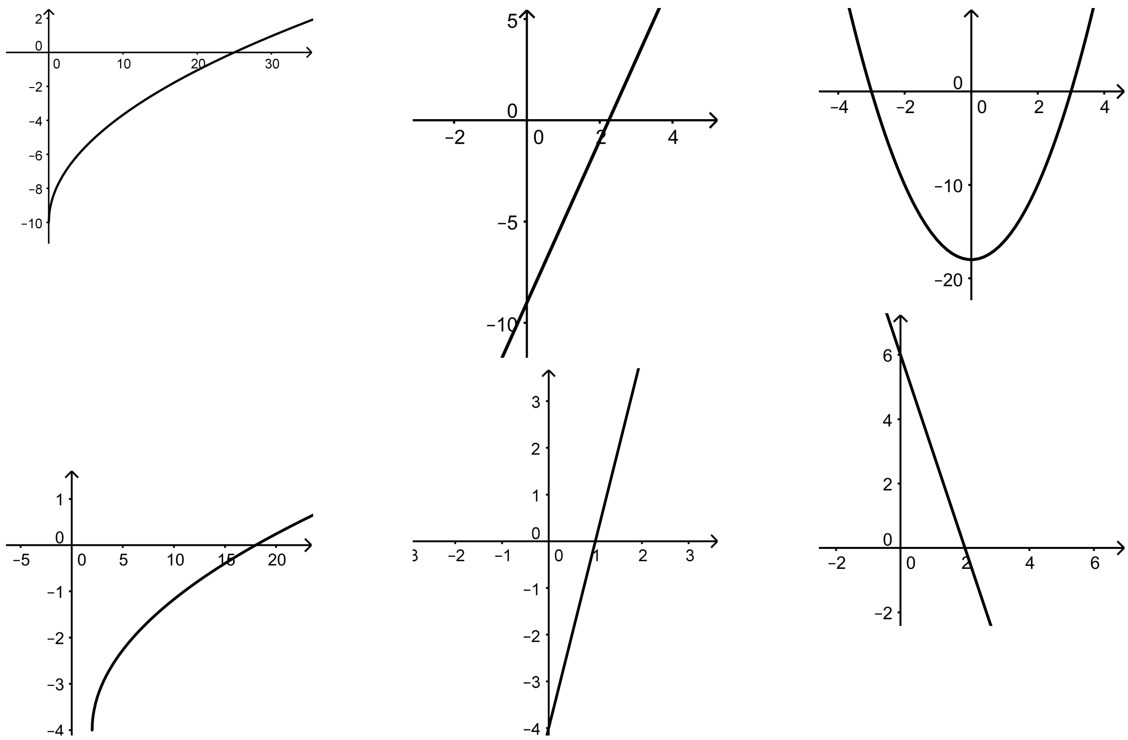
a) ¿En cuáles de los ejercicios anteriores usaron un recurso como el del ítem c) del Ejercicio 87 para comprobar el resultado obtenido?
b) ¿En cuáles todavía no lo hicieron, pero, mirando las ideas del ejercicio anterior, se les ocurre una manera de hacerlo?

Ejercicio 89 Resuelvan, en cada caso, la ecuación $f(x) = 0$.

★a) $f(x) = \sqrt{x-2} - 4$ b) $f(x) = 6 - 3x$ c) $f(x) = 4x - 9$

d) $f(x) = 2x^2 - 18$ e) $f(x) = 2\sqrt{x} - 10$ f) $f(x) = 2(2x - 3) + 2$

★**Ejercicio 90** Los siguientes gráficos corresponden a las funciones f del ejercicio anterior, pero están todos desordenados. Piensen (y expliquen por escrito lo que pensaron) la manera en que podrían usarlos para verificar las soluciones que encontraron, completar las que no pudieron determinar o corregir las que estén equivocadas.



Ejercicio 91 Resuelvan, en cada caso, la ecuación $g(t) = a$, para la función g y el valor de a dados.

a) $g(t) = 6 - t$, con $a = 1$

b) $g(t) = (2/3)t + 6$, con $a = 10$

c) $g(t) = 3(2t - 1)$, con $a = -3$

d) $g(t) = \frac{t-1}{3}$, con $a = 1$

e) $g(t) = 2(t - 1) + 4(2t + 3)$, con $a = 0$

★f) $g(t) = -\frac{24}{t-1}$, con $a = 6$

★**Ejercicio 92** Para las mismas funciones del ejercicio anterior, resuelvan, en cada caso, la ecuación $g(t) = a$, refiriéndose a un a genérico.

4. Modelos Lineales

Ejercicio 93 Grafiquen en distintos sistemas de coordenadas los puntos del plano que cumplen cada una de las siguientes condiciones:

a) La coordenada y es el doble de la coordenada x.

b) La coordenada y es la mitad de la coordenada x.

c) La suma de las coordenadas de los puntos es 3.

d) La diferencia entre las coordenadas de los puntos es 3.

★e) El doble de la coordenada x más el triple de la coordenada y es 1.

Ejercicio 94 Escriban una fórmula que involucre a las variables x e y de cada ítem del ejercicio anterior, para describir las rectas que graficaron.

Las funciones que pueden representarse gráficamente mediante una recta se denominan **funciones lineales**, y en general van a estar definidas de la siguiente manera:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} / f(x) = mx + b$$

Ejercicio 95 Completen las tablas y grafiquen las siguientes funciones lineales:

a)

$y = 2x - 1$	
x	y
-3	
-2	
0	
1	
4	

b)

$y = -x + 5$	
x	y
-2	
0	
3	
6	
8	

c)

$y = \frac{x}{2} + 3$	
x	y
-8	
-6	
2	
4	
8	

d)

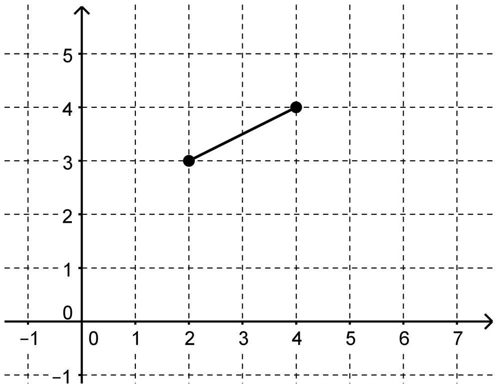
$y = -3x + 2$	
x	y
-3	
-1	
0	
2	
3	

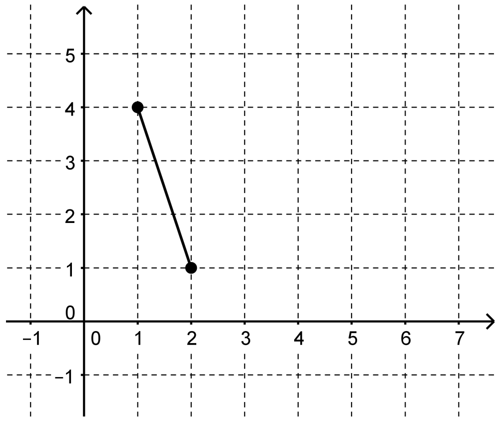
Ejercicio 96 Encuentren, en cada caso, la función lineal f que satisface

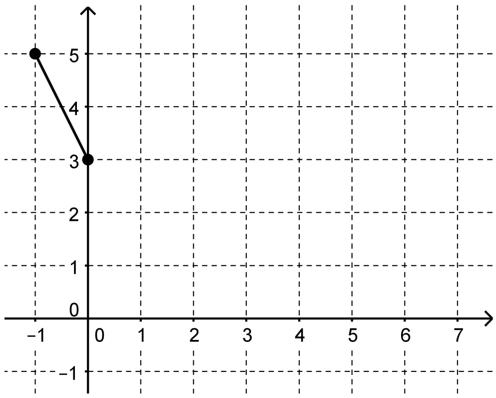
a) $f(1) = 0, f(-2) = -\frac{3}{2}$ b) $f(-3) = 7, f(10) = 7$ ★c) $f(-2) = 1, f(4) = 13$

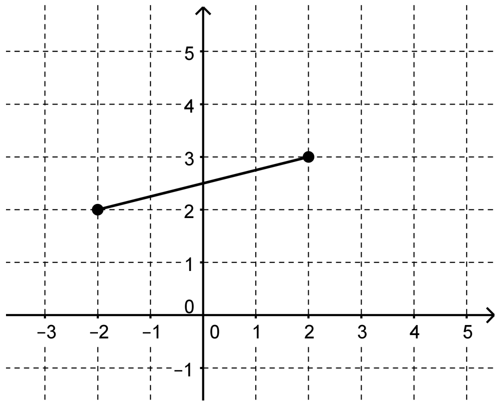
Ejercicio 97 Determinen la pendiente y la ordenada al origen de las rectas que son gráficas de las funciones lineales del punto anterior.

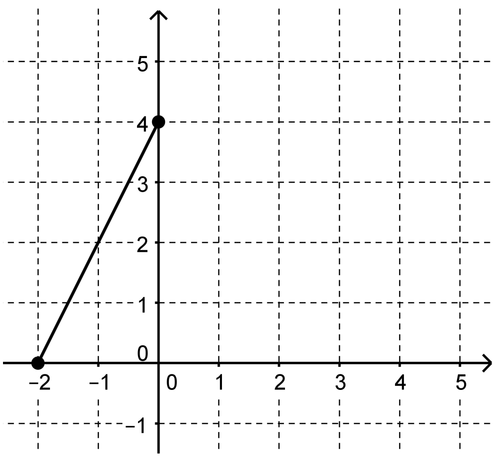
Ejercicio 98 Cada uno de los siguientes gráficos muestra una parte del gráfico de una función lineal (con ecuación $f(x) = mx + b$). Determinen, en cada caso, los valores de m y b y escriban, entonces la ecuación de la función correspondiente.

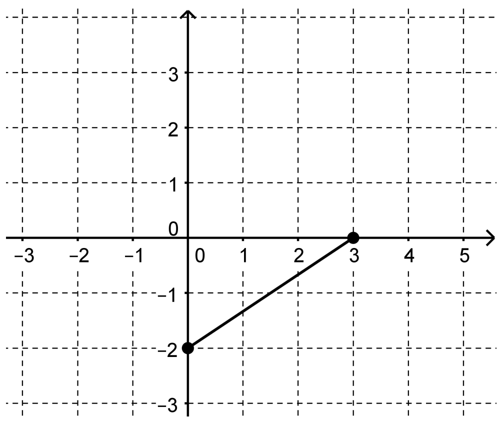
a) 

b) 

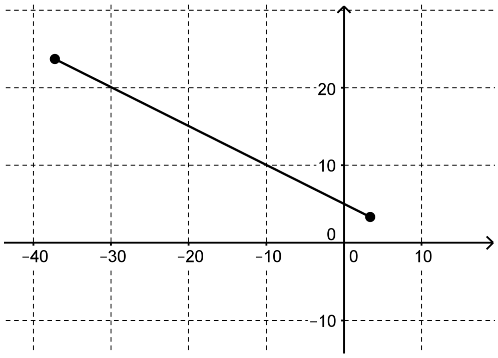
c) 

★d) 

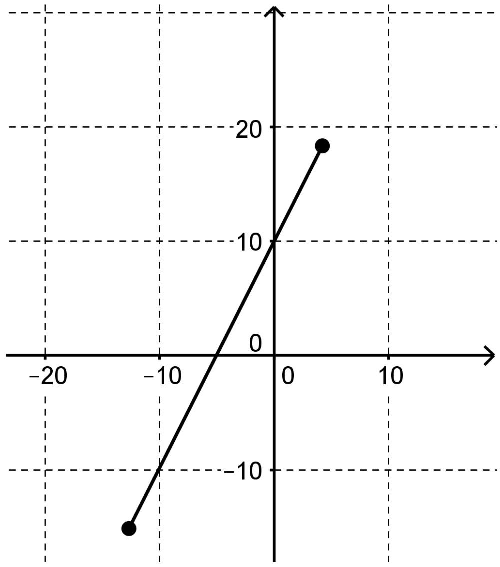
e) 

f) 

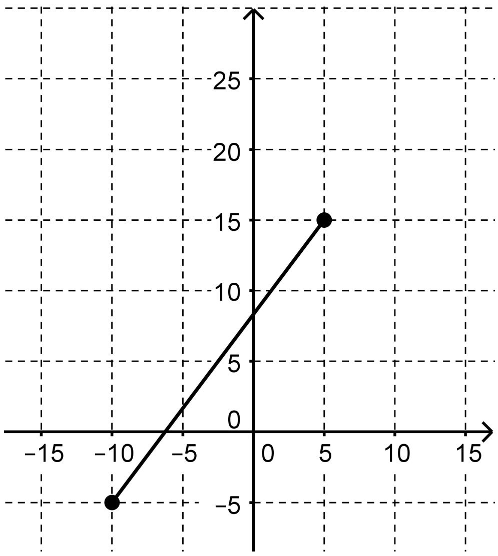
Ejercicio 99 Repitan el ejercicio anterior para cada uno de estos nuevos gráficos.



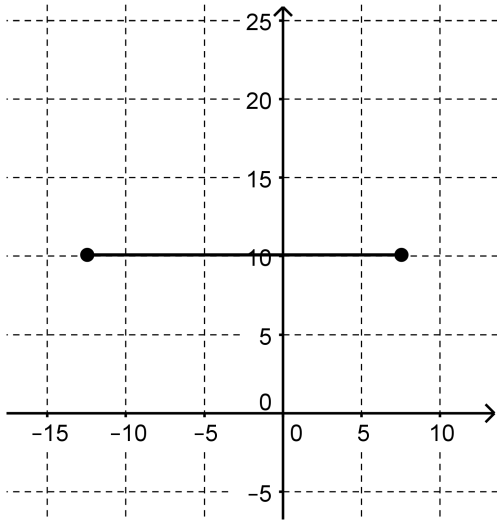
a)



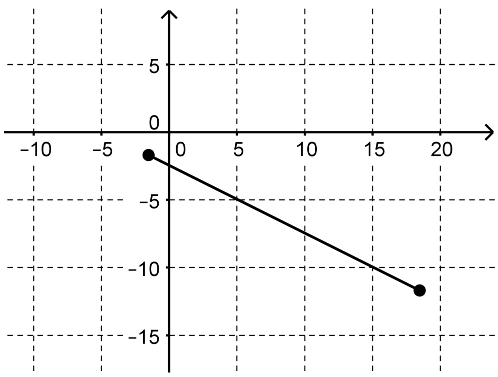
b)



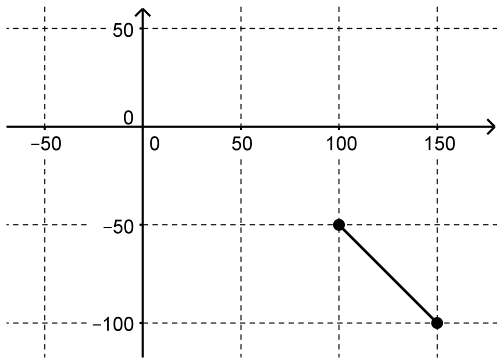
c)



d)



e)



★f)

Ejercicio 100

a) Hallen la ecuación de la recta de pendiente m que pasa por el punto P.
   (i) $P = (1, -2)$, $m = 3$
   (ii) $P = (5, 8)$, $m = 0$
   ★b) $P = (-3, 4)$, $m = -1$
   (iii) $P = (-1, 1)$, $m = -\frac{3}{2}$

c) Encuentren la pendiente de la recta que pasa por P y Q.
   (i) $P = (2, 1)$, $Q = (-4, 3)$
   (ii) $P = (3, -2)$, $Q = (5, -2)$
   (iii) $P = (0, 7)$, $Q = (7, 0)$

Ejercicio 101 Si $r(t) = 2t + 3$ describe, en función del tiempo, la posición de un móvil que se desplaza con velocidad constante, expresen y representen en un sistema de coordenadas.

★a) La posición de otro móvil que se desplaza a igual velocidad y que está tres unidades de distancia adelantado.

b) La posición de otro móvil que se desplaza al doble de velocidad y en el instante $t = 0$ se encuentra en el mismo punto que el primero.

c) La posición de otro móvil que se desplaza con la misma velocidad pero en sentido contrario y parte en $t = 0$ del mismo punto que el primero.

Ejercicio 102 En cada una de las siguientes situaciones identifiquen cuál es el valor inicial y cuál es la razón de cambio y expliquen en palabras –por escrito– cuáles son sus significados en el contexto.

a) Una nave espacial libera una sonda que viaja alejándose de la Tierra. La distancia de la sonda a la Tierra después de t segundos está dada por $s = 600 + 5t$.

b) Después de una lluvia el agua en un balde comienza a evaporarse. La cantidad en litros que queda después de t días viene dada por $V = 50 - 1{,}2t$.

★c) El cargo mensual de un celular es $200 + 0{,}53n$ pesos, donde n es la cantidad de minutos de conversación telefónica.

d) El valor de una antigüedad es $30000 + 200n$ pesos, donde n es el número de años transcurridos desde el momento en que la antigüedad fue comprada.

e) Un profesor califica el total de las tareas que un estudiante debe entregar con $100 - 3n$ puntos, donde n es el número de tareas que un alumno no entregue.

f) La población P de una ciudad se puede predecir como $P = 9000 + 500t$, dentro de t años a partir de ahora.

★**Ejercicio 103** Para cada una de las situaciones del Ejercicio anterior, redacten una pregunta que se pueda responder mediante el modelo.

Ejercicio 104 Hallen, en cada caso, una expresión de una función lineal $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que cumpla:

a) Su pendiente es 3 y contiene al punto $(-1; 2)$. ¿Es única?

b) Su pendiente es 0 y contiene al punto $(4; 7)$.

c) Su pendiente en $-\frac{2}{3}$ y contiene al punto $(4; -1)$.

Ejercicio 105 Grafiquen las funciones lineales del ejercicio anterior.

Ejercicio 106

★a) Encuentren la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(1, 3)$ y $(2, -3)$.

b) ¿Es cierto que la ecuación de la recta que pasa por $(1, -3)$ y $(2, 4)$ tiene pendiente igual a 5? Justifiquen.

Ejercicio 107 Identifiquen cada función con la recta del gráfico que le corresponde. Se sabe que las constantes s y k en cada función son las mismas.

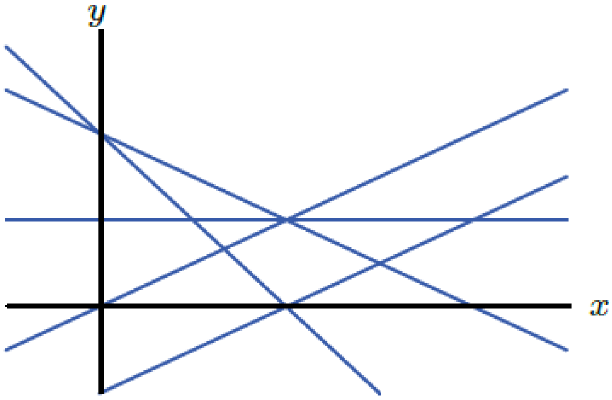
a) $f(x) = s$

b) $f(x) = kx$

c) $f(x) = kx - s$

d) $f(x) = 2s - kx$

e) $f(x) = 2s - 2kx$



Ejercicio 108 Escriban cada una de las siguientes funciones lineales en la forma $f(x) = mx + b$.

a) $f(x) = \frac{4x+6}{2}$

b) $f(x) = \frac{3x+1}{5}$

★c) $f(x) = \frac{-2x+1}{5} + \frac{2}{3}$

d) $f(x) = -5 - 3x$

e) $f(x) = \frac{x}{5} - 6$

f) $f(x) = \frac{2}{5}(x - 3) + 1$

Ejercicio 109 Escriban cada una de las siguientes ecuaciones lineales en la forma $y = mx + b$. Luego grafiquen las rectas.

a) $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$

b) $\frac{x}{2} + \frac{y}{-3} = 1$

c) $\frac{x}{-2} + \frac{y}{3} = 1$

d) $\frac{x}{-2} + \frac{y}{-3} = 1$

e) $-\frac{x}{\frac{2}{5}} + \frac{y}{7} = 1$

★f) $\frac{x}{4} - \frac{y}{\frac{1}{3}} = 1$

Ejercicio 110 Escriban las ecuaciones de las rectas del Ejercicio 108 en la forma $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$, probando las siguientes posibilidades:

a) Identifiquen algún patrón que los pueda ayudar entre las ecuaciones del Ejercicio 109 (que ya tienen la forma $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$) y los gráficos que construyeron en ese mismo ejercicio.

b) Operen algebraicamente a partir de las ecuaciones dadas hasta obtener la forma $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$ pedida.

Ejercicio 111

a) Expliquen cuáles son las ventajas que da la ecuación $y = mx + b$ para construir el gráfico y cuáles son las ventajas que da la ecuación $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$.

b) Investiguen y expliquen: ¿cuáles son las rectas del plano que se pueden describir con una ecuación de la forma $y = mx + b$, pero no con una de la forma $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$?

Ejercicio 112 Para la función lineal $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -4x + 2$ se pide:

a) Indiquen tres puntos de su gráfico.

b) Indiquen tres puntos que no pertenezcan a su gráfico.

c) Marquen en la recta que determina la función, los puntos donde la gráfica corta a cada uno de los ejes. Indiquen los valores de sus coordenadas.

★d) Determinen la intersección de la recta dada con la que se obtiene graficando la función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = 3x + \frac{1}{4}$. Interpreten en un gráfico la respuesta.

Ejercicio 113 Para cada uno de los siguientes pares de ecuaciones:

(i) $\begin{cases} y = 3x + 1 \ (1) \\ y = 2x + 3 \ (2) \end{cases}$

(iii) $\begin{cases} y = -\frac{1}{3}x + 2 \ (1) \\ x + 3y = 6 \ (2) \end{cases}$

(ii) $\begin{cases} x - 2y = -3 \ (1) \\ y = 2x + 3 \ (2) \end{cases}$

(iv) $\begin{cases} x + 2y = 10 \ (1) \\ y = -\frac{1}{2}x + 2 \ (2) \end{cases}$

resuelvan el sistema de ecuaciones en forma gráfica y en forma analítica y comparen las soluciones obtenidas para comprobar que ambos caminos conduzcan a la misma solución. Si no comprenden cómo hacerlo, las siguientes preguntas organizan, paso a paso, una posible manera de proceder.

a) Encuentren pares de valores (x, y) que verifiquen la ecuación (1).

b) Grafiquen los pares obtenidos.

c) Representen en el gráfico todos los puntos que verifican la ecuación (1).

d) En el mismo gráfico, repitan los pasos a), b) y c), pero para la ecuación (2).

e) Decidan si hay un punto que verifica las dos ecuaciones e indiquen cuáles son aproximadamente sus coordenadas.

f) Resuelvan analíticamente el sistema de ecuaciones y comparen la solución obtenida con la aproximada en el punto anterior.

Ejercicio 114 Las siguientes ecuaciones tienen a x e y como variables. Las demás letras que acompañan a las ecuaciones son constantes de valores desconocidos. Pero siempre que aparezca la constante b, a o m en varias ecuaciones va a valer lo mismo, no importa que no sepamos cuanto vale. La presencia de estas constantes permite establecer relaciones entre ellas por ejemplo $2b$ es el doble de grande de b si b es positiva.

$2x + 3y = 60$	(i)	$\dfrac{x}{2b} + \dfrac{y}{b} = 1$	(vii)
$2x + 4y = 70$	(ii)	$\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$	(viii)
$0,3333333x + 0,5y = 1$	(iii)	$\dfrac{x}{6} + \dfrac{y}{4} = 1$	(ix)
$y = m \cdot x + b$	(iv)	$y = 31$	(x)
$y = 2m \cdot x + b + 3$	(v)	$y = \dfrac{2}{3}x + 20$	(xi)
$\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{2a} = 1$	(vi)	$y = b - \dfrac{x}{m}$	(xii)

a) Hallen valores de x e y que cumplan simultánemente las ecuaciones (i) y (ii).

b) Hallen valores de x e y que cumplan simultánemente las ecuaciones (i) y (iii).

c) Hallen valores de x e y que cumplan simultánemente las ecuaciones (ii) y (iii).

d) Hallen valores de x e y que cumplan simultánemente las ecuaciones (i) y (xi).

e) Hallen valores de x e y que cumplan simultánemente las ecuaciones (i) y (ix).

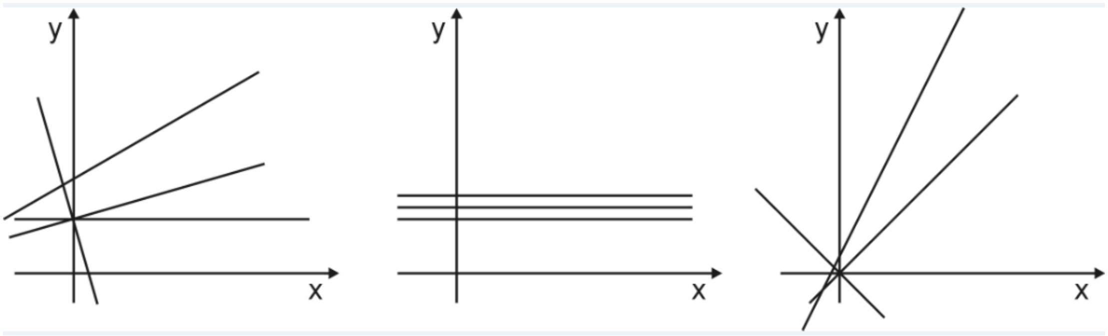
f) Hallen valores de x e y que cumplan simultánemente las ecuaciones (ix) y (xi).

★g) ¿Existen valores x e y que sean comunes a las ecuaciones (vi) y (vii)?

h) ¿Existen valores x e y que sean comunes a las ecuaciones (vi), (vii) y (viii) simultáneamente?

i) ¿Es posible hallar un valor de b para que las ecuaciones (vii) y (ix) tengan infintas soluciones x e y?

j) ¿Cuáles de los siguientes gráficos puede corresponder a las ecuaciones (iv), (v), (x) y (xii)? ¿Por qué? Justifiquen qué valores podrían tomar las constantes m y b.



5. Modelos cuadráticos

Ejercicio 115 Identifiquen cuáles de las siguientes fórmular corresponden al Gráfico 1, cuáles al Gráfico 2 y cuáles a ninguno de los dos. Expliquen los recursos que usan para tomar las decisiones.

- $f_1(x) = (x-1)^2 - 4$
- $f_2(x) = (x-3)(x-1)$
- $f_3(x) = (x+3)(x+1)$
- $f_4(x) = -(x-1)^2 + 4$
- $f_5(x) = -x^2 - 2x + 3$
- $f_6(x) = x^2 - 4x + 3$
- $f_7(x) = -(x-3)(x+1)$
- $f_8(x) = -x^2 + 2x + 3$
- $f_9(x) = (x-2)^2 - 1$

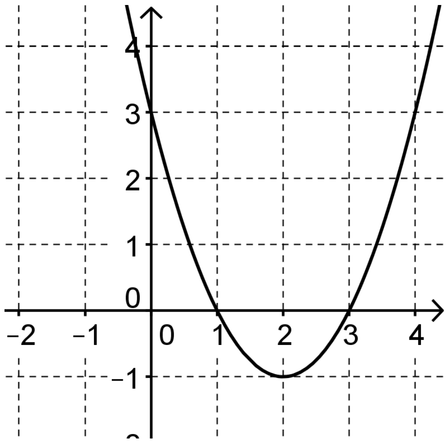


Gráfico 1

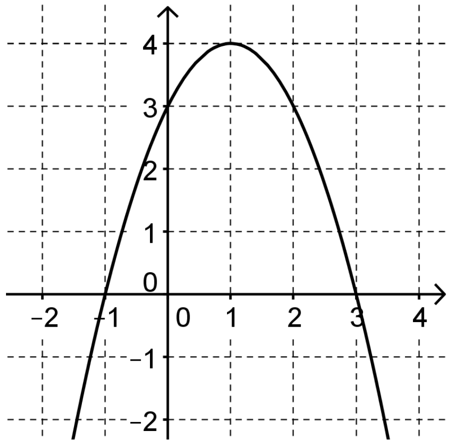


Gráfico 2

★**Ejercicio 116** La ecuación de una misma función cuadrática se puede escribir de muchas formas equivalentes. Decidan si las siguientes ecuaciones corresponden o no a una misma función[1].

a) $f(x) = (x-4)\cdot(2x+1)$

b) $f(x) = (x-4)\cdot 2x + 1$

c) $f(x) = 2x^2 - 7x - 4$

d) $f(x) = 2(x - \frac{7}{4})^2 - \frac{81}{8}$

Ejercicio 117 Si no lo hicieron antes, tomen todas las fórmulas del **Ejercicio** 115 y operen algebraicamente sobre ellas hasta llevarlas a la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$. Verifiquen comparando esas expresiones si fue correcta la respuesta que encontraron para aquel ejercicio.

★**Ejercicio 118** Los gráficos de las funciones cuadráticas son curvas llamadas **parábolas**. Las parábolas tienen un **eje de simetría**, lo que significa que si f es una función cuadrática, para casi cualquier número x_1 existe un $x_2 \neq x_1$ tal que $f(x_1) = f(x_2)$. Sea $f(x) = 2x^2 + 5x - 1$.

a) Encuentren $x \neq 0$ tal que $f(x) = f(0)$.

b) Usen la información del ítem anterior para determinar el eje de simetría de la parábola.

[1] Este Ejercicio y su resolución, más ampliada, aparecen también en el cuadernillo principal del TRP.

c) Encuentren cuatro parejas de puntos x_1 y x_2 tales que $f(x_1) = f(x_2)$ y completen una tabla del tipo

x	...		
$f(x)$	...		

d) Grafiquen los puntos de la tabla y utilícenlos para construir un gráfico aproximado de f.

e) ¿Por qué el enunciado dice "para *casi cualquier* número x_1 existe un $x_2 \neq x_1$ tal que $f(x_1) = f(x_2)$"?

Ejercicio 119 Repitan el ejercicio anterior para las siguientes funciones cuadráticas:

a) $f_1(x) = x^2 + 3x$

b) $f_2(x) = (x-3)(x+4)$

c) $f_3(x) = 2(x-1)^2 + 1$

d) $f_4(x) = x^2 - 3x + 1$

Ejercicio 120 Encuentren (si existen) los puntos en los que cada gráfico del ejercicio anterior interseca al eje x,

a) Aproximadamente, observando el gráfico.

b) Exactamente, resolviendo la ecuación $f(x) = 0$.

Ejercicio 121 Hallen dos puntos simétricos que pertenezcan al gráfico de la parábola de ecuación $y = 2x^2 + x + 1$.

Una **ecuación cuadrática** es una expresión de la forma:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

donde a, b, y c pueden tener cualquier valor, con la excepción de que a no puede ser 0 (¿por qué no?).

La letra x es la incógnita de la ecuación, y las letras a, b y c son los coeficientes.

Es bien sabido que este tipo de ecuaciones pueden resolverse completamente apelando a lo que solemos llamar fórmula resolvente:

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

donde la cantidad $b^2 - 4ac$, que llamaremos **discriminante**, nos va a brindar información acerca de las soluciones que puede presentar una ecuación cuadrática.

Vamos a separar esto en tres casos posibles:

a) $b^2 - 4ac > 0$, esto quiere decir que la ecuación tiene dos soluciones reales.

b) $b^2 - 4ac = 0$, esto quiere decir que la ecuación tiene una solución real[a].

c) $b^2 - 4ac < 0$, esto quiere decir que la ecuación no tiene soluciones reales.

Aunque la fórmula resolvente nos permita hallar la solución de cualquier ecuación cuadrática, vale mencionar que no es la única forma de hacerlo, en algunos casos quizás no sea necesario su uso, pues resultará más sencillo trabajar de otra manera. Veamos algunos ejemplos:

[a] Aunque en la práctica es lo mismo, a veces conviene pensar que tiene dos raíces iguales.

★**Ejercicio 122** Resuelvan las siguientes ecuaciones:

a) $x^2 - 9 = 0$

b) $x^2 - 3x = 0$

Ejercicio 123 Resuelvan las siguientes ecuaciones:

a) $x^2 - 4 = 0$

b) $-x^2 + 2 = 0$

c) $-x^2 - 3x - 2 = 3$

d) $-3x^2 - 7x + 4 = 6$

e) $3x^2 - 2x + 2 = -2$

f) $2x^2 + 10x + 5 = -7$

Ejercicio 124 Grafiquen la parábola de ecuación $y = x^2$ junto con cada grupo de funciones en un mismo sistema de ejes. Hallen las coordenadas del vértice y, en los casos en que existan, los puntos de intersección de la parábola con los ejes coordenados.

- Grupo1: $y = x^2 + 1$; $y = (x+1)^2$; $y = 2x^2$.
- Grupo 2: $y = (x-2)\cdot(x+3)$; $y = 2x^2 + 3x - 2$; $y = x^2 - 1$.
- Grupo 3: $y = x^2 + 3$; $y = (x-2)^2$; $y = 2(x+2)\cdot(x-3)$.

★**Ejercicio 125** Sea la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cuya expresión es de la forma $f(x) = a(x - x_1)\cdot(x - x_2)$ (con a, x_1 y x_2 reales, $a \neq 0$). ¿Es f una función cuadrática? ¿Por qué? Escríbanla en la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Ejercicio 126 Sea la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cuya expresión es de la forma $f(x) = a(x-p)^2 + q$ con a, p y q reales, $a \neq 0$. La expresión de f, ¿corresponde a una función cuadrática? ¿Por qué? Escríbanla en la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Ejercicio 127 Una función cuadrática que viene dada en la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ se puede expresar en la forma $f(x) = a(x-p)^2 + q$. El procedimiento algebraico para llevar a cabo esta re-escritura de la fórmula consiste en completar cuadrados. En Internet hay muchas páginas y videos que explican cómo hacerlo.

a) Vean si pueden resolver el punto b). En caso de que no sepan cómo hacerlo, lean antes el contenido de la página
`http://matematicatuya.com/NIVELACION/ALGEBRA/Completar-cuadrados.html`

b) Para cada una de las siguientes funciones cuadráticas dadas en forma **polinómica** (es decir, $f(x) = ax^2 + bx + c$) obtengan la correspondiente ecuación en la forma **canónica** (es decir, $f(x) = a(x-p)^2 + q$).

(i) $f(x) = x^2 + 6x + 10$

(ii) $g(x) = x^2 - 3x + 4$

(iii) $h(x) = x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{4}{5}$

★c) $f(x) = 2x^2 + 4x + 11$

(iv) $g(x) = 4x^2 - 3x + 5$

(v) $h(x) = \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{4}{5}$

Ejercicio 128

★a) Observen la lista de funciones cuadráticas a la derecha y, para cada una de ellas, obtengan:

(i) Eje de simetría.

(ii) Coordenadas del vértice.

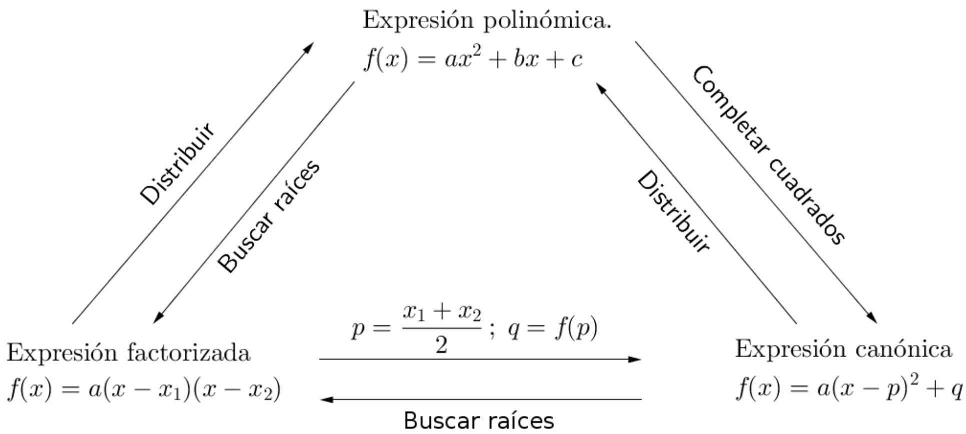
(iii) Raíces (si las hay)

(iv) Gráfico aproximado.

b) Expliquen, de las distintas ecuaciones, cuál resulta más cómoda en su manejo para obtener cada una de las informaciones que se piden en los puntos anteriores.

- $g_1(x) = \frac{1}{2}(x-3)(x+2)$
- $g_2(x) = 3x^2 - 9x + 6$
- $g_3(x) = -\frac{3}{2}(x-3)^2 + \frac{3}{2}$

Ejercicio 129 En el siguiente diagrama se describen distintas fórmulas posibles para una función cuadrática.



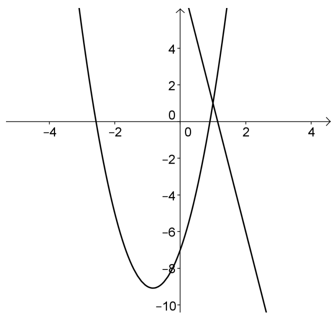
Escriban una lista de las distintas funciones cuadráticas que fueron apareciendo entre los ejercicios anteriores y utilícenlas para practicar expresarlas de cada una de las tres maneras ilustradas en el diagrama.

Ejercicio 130 Decidan a cuál de los siguientes pares de funciones corresponde la figura y determinen las coordenadas de los puntos en los que se cruzan los dos gráficos.

a) $f(x) = 2x^2 + 7x - 15$ y $g(x) = 3x + 1$

b) $f(x) = 3x^2 + 5x - 7$ y $g(x) = -7x + 8$

c) $f(x) = -3x^2 + 5x - 9$ y $g(x) = 2x + 9$



Ejercicio 131 Resuelvan los siguientes problemas planteando las ecuaciones que consideres necesarias:

a) La suma de un número positivo y su cuadrado es 42. Hallen dicho número.

★b) Hallen dos números consecutivos cuyo producto es 380.

c) La suma de los cuadrados de dos números consecutivos en 5. Hallen dichos números.

d) Los lados de un triángulo rectángulo tienen por medida (en cm) tres números pares consecutivos. Hallen las medidas de dichos lados (Sugerencia: tengan en cuenta el teorema de Pitagoras).

Ejercicio 132 Dos fabricantes de cierto artículo con una producción x (en miles de unidades) obtienen respectivamente una ganancia (en miles de pesos) de:

$$p_1(x) = -x^2 + 4x - 3 \qquad \text{y} \qquad p_2(x) = x - 13$$

a) Grafiquen ambas funciones de ganancia.

b) ¿Cuántas unidades deben producir ambos fabricantes para obtener la misma ganancia?

c) ¿Para qué producción las ganancias obtenidas por el primer fabricante cuadruplican las del segundo?

Ejercicio 133 Encuentren en cada caso, si es posible, la fórmula de una función cuadrática cuyo gráfico pase por los puntos dados[2].

[2] Este Ejercicio y su resolución, más ampliada, aparecen también en el cuadernillo principal del TRP.

★a) $A = (1,2)$, $B = (2,5)$ y $C = (5,-1)$.

b) $A = (1,2)$ y $B = (2,5)$

c) $A = (1,2)$, $B = (2,5)$ y $D = (-1,-4)$

Ejercicio 134 Las siguientes ecuaciones tienen a x e y como variables. Las demás letras que acompañan a las ecuaciones son constantes de valores desconocidos. Pero siempre que aparezca la constante a, b, c o cualquier otra letra distinta de x e y, en varias ecuaciones, esa letra va a valer lo mismo, no importa que no sepamos cuanto vale. La presencia de estas constantes permite establecer relaciones entre ellas por ejemplo b^2 es b elevado al cuadrado, aunque no sepamos cuál es el valor de b.

$$y = x^2 + x - 1 \quad \text{(i)} \qquad y = ax^2 + bx + c \quad \text{(v)} \qquad \frac{y}{x^2} = \frac{c}{x^2} + \frac{b}{x} + a \quad \text{(ix)}$$

$$y = x^2 - x + 1 \quad \text{(ii)} \qquad y = ax^2 + b^2x + c \quad \text{(vi)} \qquad y = cx^2 + ax + b \quad \text{(x)}$$

$$y = x^2 + bx - 1 \quad \text{(iii)} \qquad y = a^2x + bx + c \quad \text{(vii)} \qquad y = ay^2 + bx + c \quad \text{(xi)}$$

$$y = -x^2 + bx + 1 \quad \text{(iv)} \qquad y = \frac{a}{x^2} + \frac{b}{x} + c \quad \text{(viii)} \qquad y = a^2x^2 + 2ax + 1 \quad \text{(xii)}$$

a) Diseñen un método para elegir dos de las ecuaciones de la lista anterior al azar de manera que todas las ecuaciones tengan la misma probabilidad de ser elegidas.

b) Usen el método diseñado en el ítem anterior para elegir dos ecuaciones de la lista.

c) Decidan si las ecuaciones elegidas son cuadráticas.

d) Hallen las raíces de las ecuaciones elegidas.

e) Hallen valores de x e y que cumplan simultáneamente las ecuaciones elegidas o den argumentos para justificar por qué tales valores no pueden existir.

f) Si las ecuaciones dependen de algunos parámetros, analizar los tres puntos anteriores de acuerdo a los posibles valores que puedan tomar los parámetros, estableciendo relaciones entre ellos.

g) ¿Cuáles de los gráficos de la Figura 5.1 pueden corresponder a las ecuaciones elegidas? ¿Por qué? Justificar qué valores podrían tomar las constantes o qué relaciones podrían establecerse entre ellas.

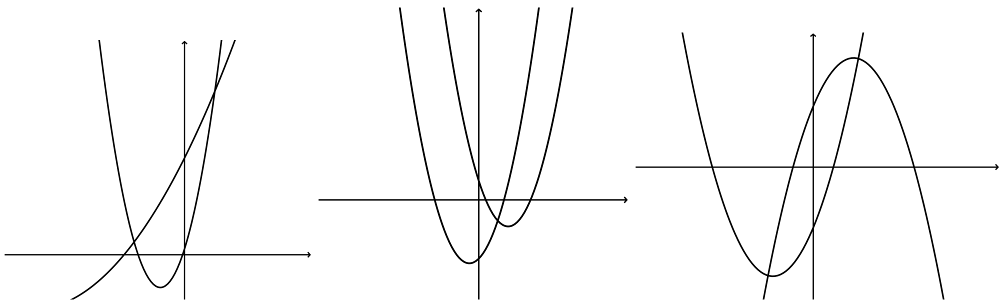


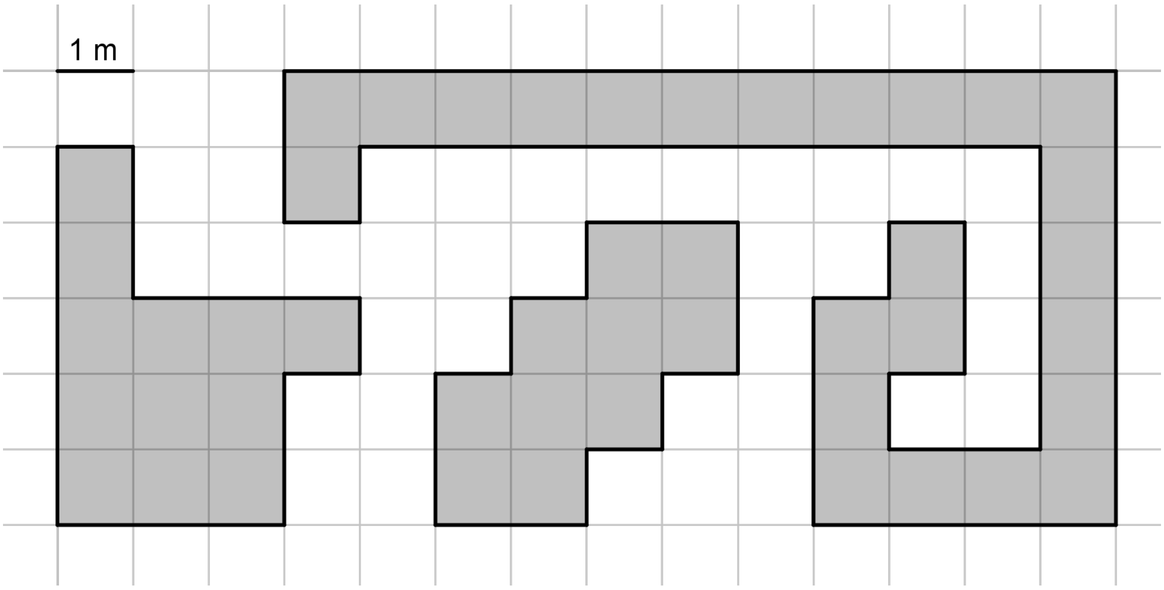
Figura 5.1: ¿En qué casos son y en qué casos no son?

h) Vuelvan al paso b) y repítanlo hasta obtener un par de ecuaciones que no hayan trabajado previamente en simultáneo. En caso de haber estudiado todos los pares de ecuaciones pasen al ítem siguiente.

i) Calculen cuántas veces se puede repetir el ciclo de arriba hasta que ya no queden pares por elegir.

6. Geometría

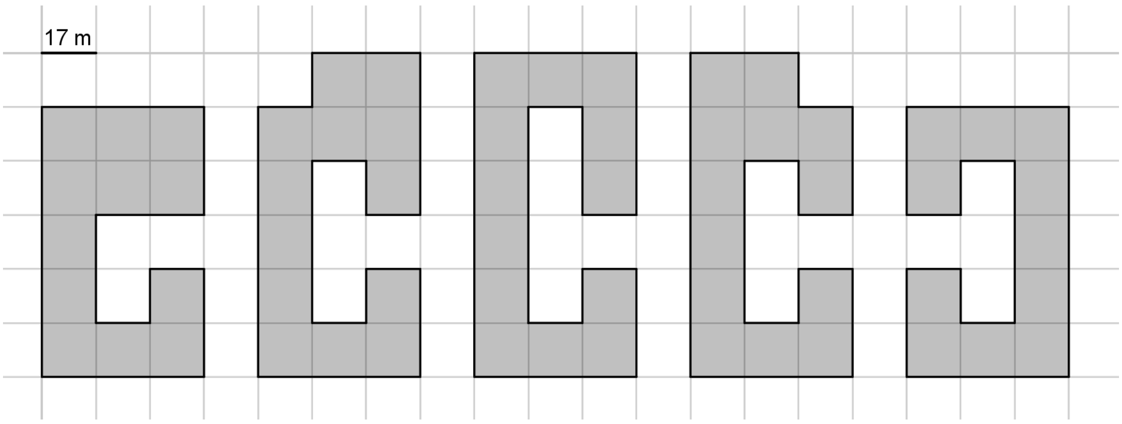
★**Ejercicio 135** Para las siguientes figuras, tomando como referencia la medida del segmento indicado, calculen el área y el perímetro.



a) ¿En qué unidades se mide el área?

b) ¿En qué unidades se mide el perímetro?

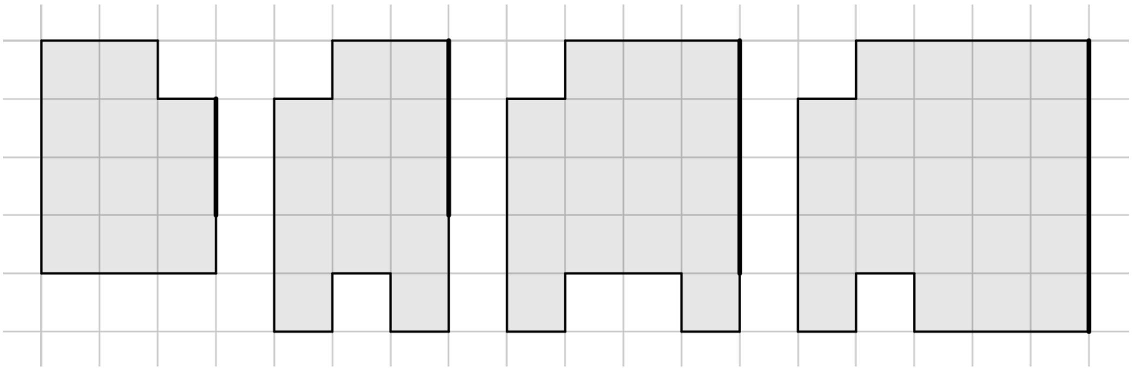
★**Ejercicio 136** Para las siguientes figuras, tomando como referencia la medida del segmento indicado, calculen el área y el perímetro.



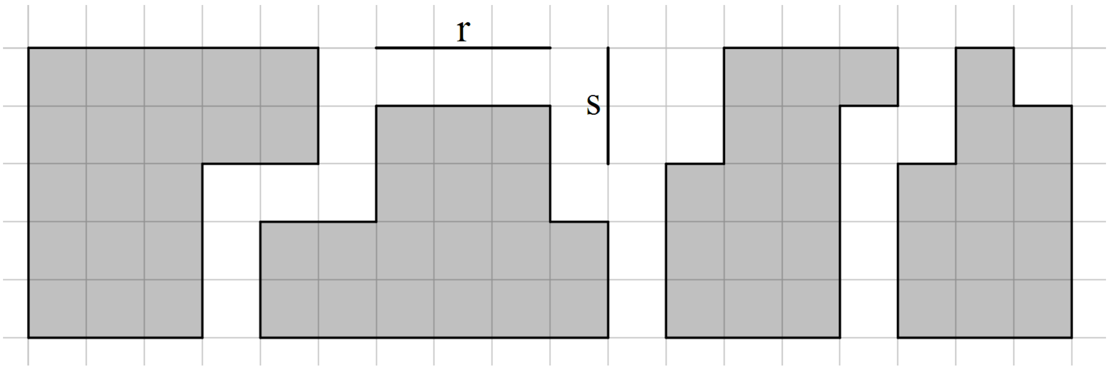
a) ¿En qué unidades se mide el área?

b) ¿En qué unidades se mide el perímetro?

Ejercicio 137 Para las siguientes figuras calculen el área y el perímetro, sabiendo que el segmento marcado en cada figura mide 1 m.



★**Ejercicio 138** Para las siguientes figuras calculen el área y el perímetro, sabiendo que el segmento r mide 1 cm y el segmento s mide 3 cm. (¡Atención! La información de las medidas de r y s no coincide con lo que se ve.)



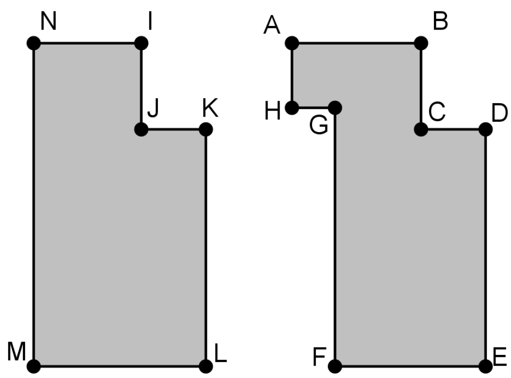
Ejercicio 139 Para las siguientes figuras:

a) Calculen el área y el perímetro sabiendo las medidas de: $\overline{JK} = 3$, $\overline{KL} = 11$, $\overline{LM} = 8$, $\overline{MN} = 15$.

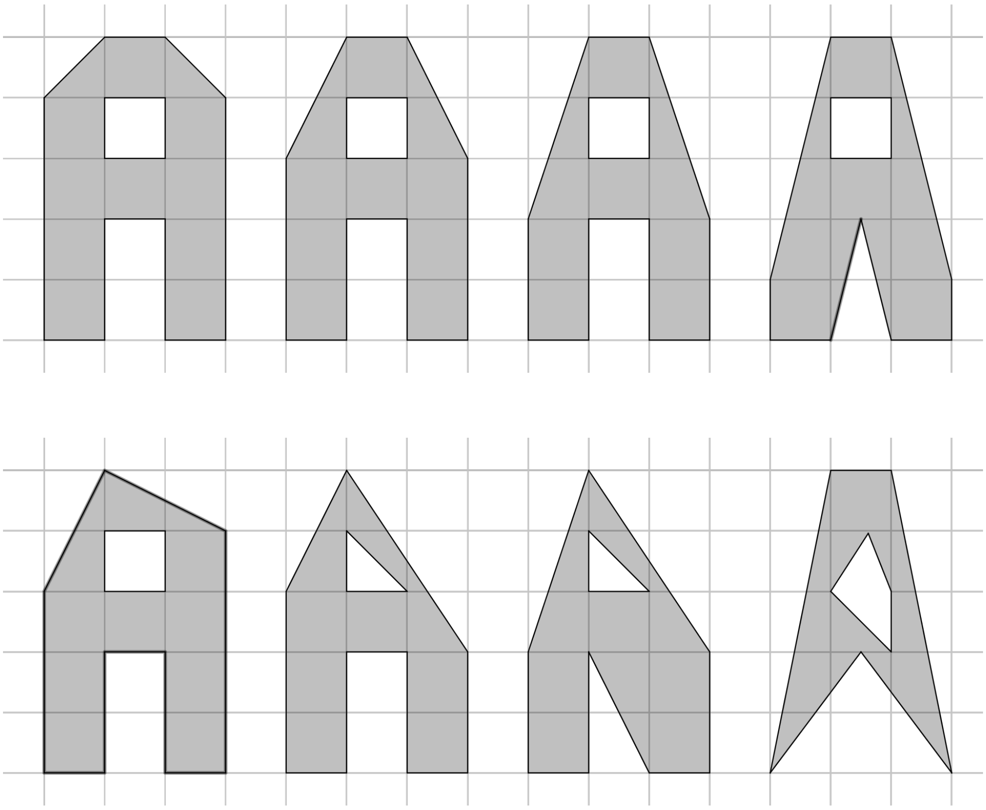
b) Calculen el área sabiendo las medidas de: $\overline{JK} = 7$, $\overline{KL} = 17$, $\overline{MN} = 23$, perímetro $= 80$.

c) Calculen el perímetro sabiendo las medidas de: $\overline{JK} = 5$, $\overline{KL} = 13$, $\overline{NI} = 7$, área $= 192$.

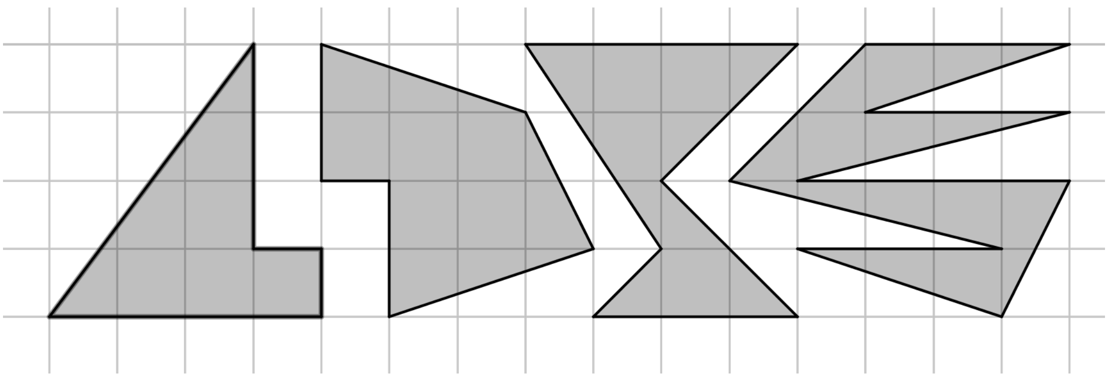
d) Calculen el área y el perímetro sabiendo las medidas de: $\overline{AB} = 7$, $\overline{CD} = 3$, $\overline{GH} = 4$, $\overline{AH} = 3$, $\overline{DE} = 11$, $\overline{FG} = 5$.



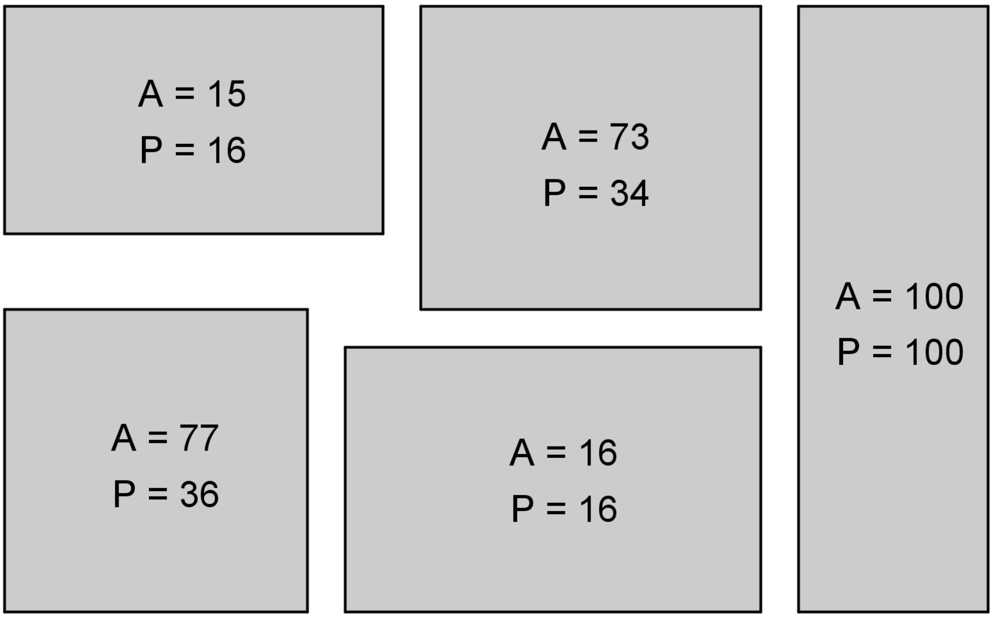
★**Ejercicio 140** Para las siguientes figuras, tomando como referencia la medida del lado del cuadradito (1 m), calculen el área y el perímetro de cada letra A.



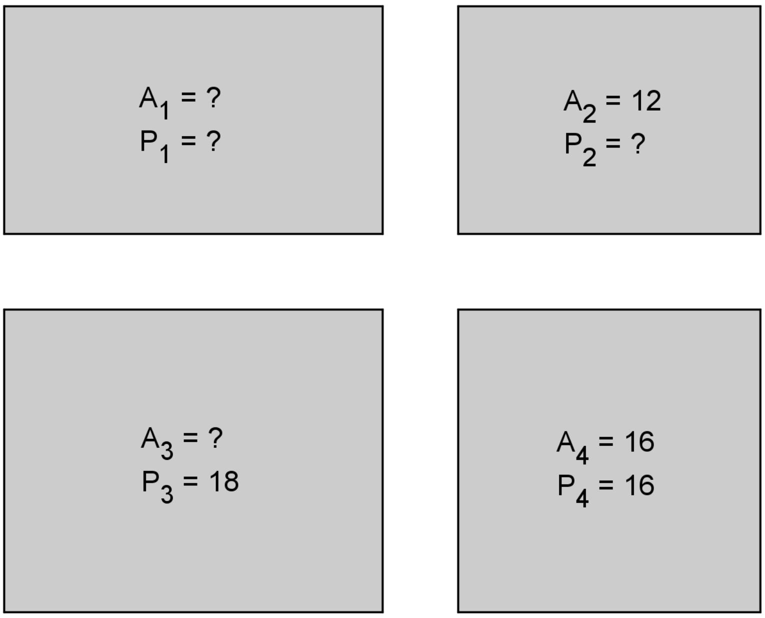
Ejercicio 141 Para las siguientes figuras, tomando como referencia la medida del lado del cuadradito (2 m), calculen el área y el perímetro de cada figura.



★**Ejercicio 142** Para las siguientes figuras, sabiendo que *A* representa el valor del área y *P* representa el valor del perímetro calulen la longitud de los lados.

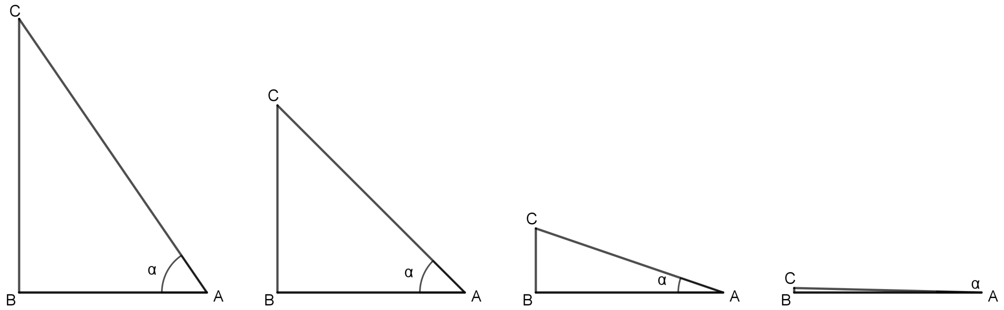


Ejercicio 143 Escriban el enunciado de este ejercicio y resuélvanlo.



7. Trigonometría

Ejercicio 144 Si el seno del ángulo α (es decir el número $\operatorname{sen}(\alpha)$) es el cociente entre la medida del cateto opuesto a α y la hipotenusa del triángulo, ¿qué pueden decir del valor de $\operatorname{sen}(\alpha)$ para los distintos triángulos de la secuencia?



Ejercicio 145 Piensen las mismas preguntas del problema anterior, pero para:

a) $\cos(\alpha) = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}$

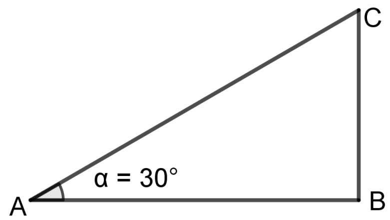
b) $\tan(\alpha) = \frac{\text{opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$

c) $\operatorname{cosec}(\alpha) = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{opuesto}}$

d) $\sec(\alpha) = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}}$

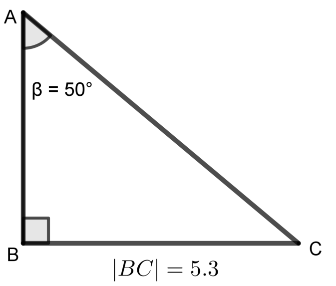
e) $\operatorname{cotg}(\alpha) = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}}$

Ejercicio 146 Si el lado BC mide 2 metros, calculen la longitud, en metros, de la hipotenusa.

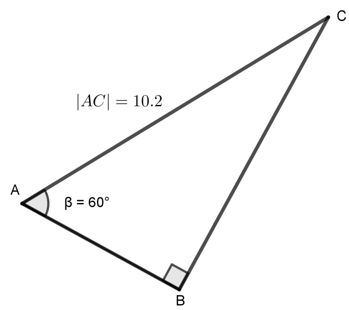


Ejercicio 147 En cada uno de los siguientes triángulos calculen las medidas de los lados y los ángulos que faltan.

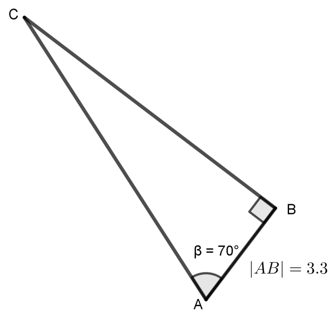
★a)



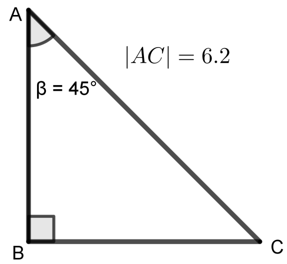
b)



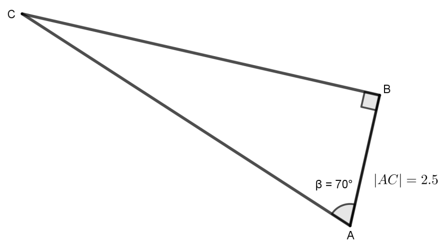
c)



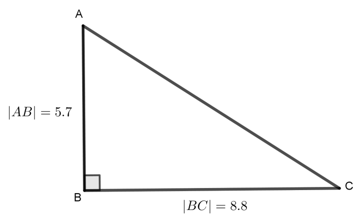
d)



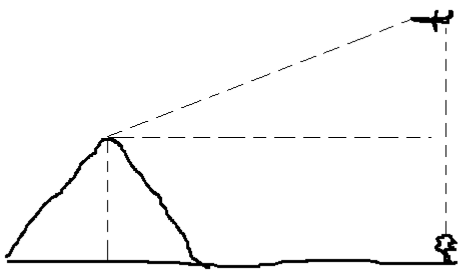
e)



f)



Ejercicio 148 Desde la cima de una montaña de altura 3000 metros, se observa un avión con un ángulo de elevación de $30°$, como indica la figura. En ese mismo instante, el avión está justo encima de un árbol que está a 500 metros del pie de la montaña. Si la ladera de la montaña mide 5000 metros, ¿a qué altura en metros está el avión?



Ejercicio 149 Calculen la altura de una torre sabiendo que su sombra mide 13 cm cuando los rayos del Sol forman un ángulo de $50°$ con el suelo.

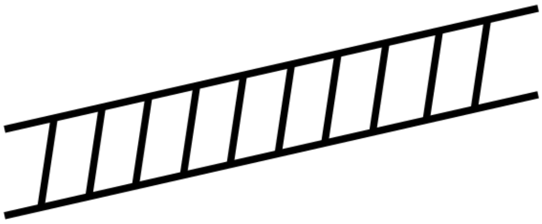
Ejercicio 150 Un triángulo es **isósceles** si tiene dos lados iguales. Se sabe que en un triángulo isósceles determinado hay un lado distinto a los otros dos que mide 10 cm y los ángulos iguales miden $70°$. Calculen su área y su perímetro.

Ejercicio 151 Calculen los ángulos de un rombo cuyas diagonales miden 12 cm y 8 cm.

Ejercicio 152 ¿Puede existir algún ángulo cuyo coseno valga 2? ¿Por qué?

Ejercicio 153 Si la sombra de un poste vertical es la mitad de su altura, ¿qué ángulo forman los rayos del sol con el poste?

Ejercicio 154 Una escalera como la de la figura mide 4 m y está apoyada contra la pared. ¿Cuál será su inclinación si su base está a 2 m de la pared?



Ejercicio 155 De un triángulo rectángulo se sabe que un ángulo agudo mide $45°$ y uno de sus catetos 5 cm. ¿Cuánto miden el otro cateto, la hipotenusa y el otro ángulo?

★**Ejercicio 156** Los dos ángulos agudos de un triángulo rectángulo se llaman **complementarios**: su suma es un recto ($90°$).
¿Se podrá calcular las razones trigonométricas de un ángulo si conocemos las de su complementario?
Por ejemplo: si se nos dijesen que $\text{sen}(43°) = 0{,}68$ y $\cos(43°) = 0{,}73$ ¿cómo podríamos calcular el seno y el coseno de $47°$?

Ejercicio 157 ¿Existirá algún ángulo α para el cual se verifique $\text{sen}^2\alpha\cos^2\alpha = 4$? Justificá la respuesta, sin hacer cuentas.

Ejercicio 158 De acuerdo a la Figura, ¿cuál de las siguientes expresiones es falsa?

a) $3 = 5\cos(\alpha)$

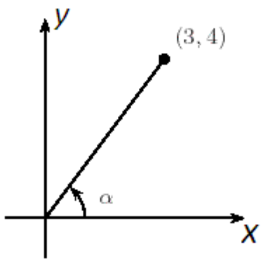
b) $\text{sen}(\alpha) = \frac{4}{5}$

c) $\tan(\alpha) = \frac{3}{4}$

d) $\text{sen}(\alpha) = \frac{3}{4}$

e) $16\tan(\alpha) = 9$

f) $16\tan(\alpha) = 9$

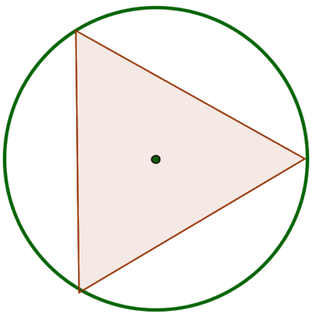


Ejercicio 159 Si $\text{sen}(\alpha) = a$ y $\sec(\alpha) = b$, entonces $\tan(\alpha)$ es igual a:..........

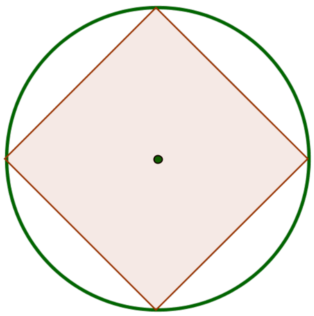
Ejercicio 160 Calculen el valor del seno de un ángulo agudo cuyo coseno vale $0{,}6$.

Ejercicio 161 cada figura muestra un polígono regular (todos sus lados y sus ángulos son iguales) inscripto en una circunferencia de radio 5 cm. Calculen el perímetro y el área de cada uno.

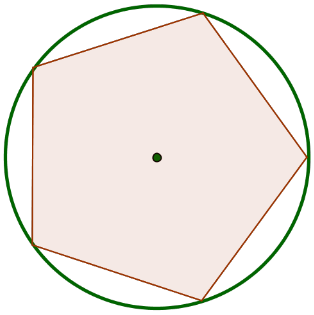
a)



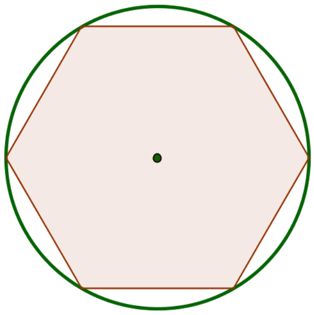
b)



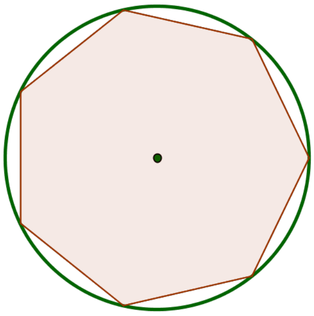
★c)



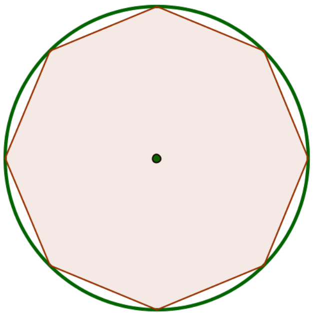
d)



e)



f)



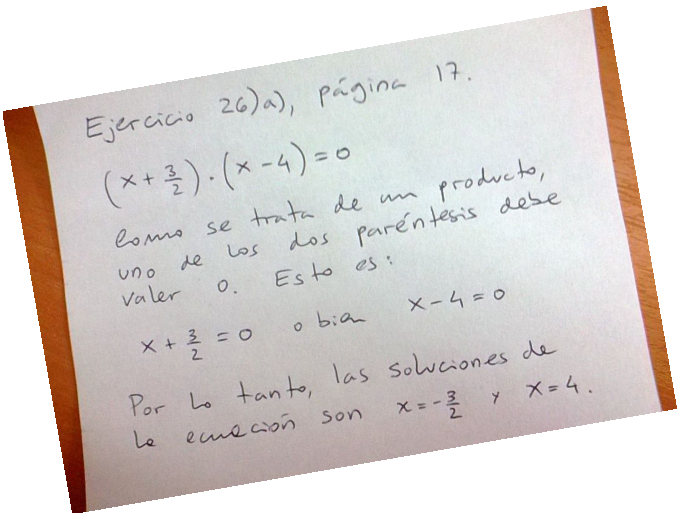
Apéndice A
Ejemplos Resueltos

¿Cómo se usa este apéndice?

En este apéndice encontrarás algunos ejercicios de este cuadernillo resueltos a modo de ejemplo. Son los que en las respectivas secciones aparecen identificados con el ícono ★. A veces ver un ejemplo resuelto ayuda también a comprender la consigna. Sin embargo, es importante que no uses el recurso inmediato de ir a consultar el ejemplo resuelto como parte de la comprensión de la consigna, sino que antes intentes comprenderla por tu cuenta. Entrenarse en la comprensión de consignas es también parte de los objetivos de este cuadernillo.

¿Querés participar más?

Este cuadernillo de ejercicios se irá mejorando y enriqueciendo todos los años. Te invitamos a sumar tu granito de arena, para darte la oportunidad de sentir que, como estudiante, podés tener una participación directa y con llegada a los que serán tus compañeros de la carrera. Éste es un ejemplo de un ejercicio resuelto, escrito a mano.



Podés resolver ejercicios, fotografiarlos o escanearlos y enviarlos a matematica@unm.edu.ar. Los envíos deben cumplir las siguientes condiciones:

- Puede tener o no tu nombre y apellido. Si lo incluís y nos lo pedís, podemos mencionarte en una lista de estudiantes que hicieron aportes, en la próxima edición.
- Debe indicar claramente el número de Ejercicio, de ítem y de página. Por ejemplo, Ejercicio 39, página 15.
- Debe estar escrito en hoja lisa, con tinta negra y muy prolijo, para que otros lo puedan leer y entender. También puede estar hecho en computadora e impreso o puede enviarse por mail como un archivo de texto.

Mientras esperamos ansiosos recibir sus participaciones con ejercicios resueltos, comenzamos a compartir las nuestras...

Producción de fórmulas

★**Ejercicio** 2b), página 9:

Si la cuenta en pesos es C, el $12\,\%$ se calcula como $\frac{12}{100}C$. Equivalentemente, como $\frac{3}{25}C$, o bien como $0{,}12C$.

★**Ejercicio** 4a), página 9:

Si el precio del vestido en pesos es P, el descuento del $15\,\%$ se calcula como $\frac{15}{100}P$. Como esta cantidad es la que se debe restar al precio del vestido, debemos calcular

$$\begin{aligned} P-\frac{15}{100}P &= (1-\frac{15}{100})P \\ &= \frac{85}{100}P \end{aligned}$$

Lo que muestra que calcular el $15\,\%$ y después descontarlo equivale a calcular directamente el $85\,\%$ del precio.

★**Ejercicio** 7c), página 10:

Juan tiene exactamente $10a + 25b + 50c + 100d$ centavos.

★**Ejercicio** 9c), página 10:

Sumar 3 a x:	$x+3$
Quitarle el resultado a 1:	$1-(x+3)$
Duplicar:	$2\cdot(1-(x+3))$

Observen el uso de los paréntesis debido a que a 1 hay que quitarle *todo* el resultado anterior y, en el último paso, hay que duplicar *todo* lo que se había obtenido. Desde luego, la última expresión se puede simplificar operando un poco algebraicamente:

$$\begin{aligned} 2\cdot(1-(x+3)) &= 2\cdot(1-x-3)) \\ &= 2\cdot(-x-2)) \\ &= -2x-4 \end{aligned}$$

★**Ejercicio** 10f), página 10:

La expresión $a-(b-c)$ dice que hay que restarle al número a el resultado de haberle restado el número b a c. La expresión $a-b-c$, en cambio, dice que hay que restarle al número a el número b y luego restarle c a ese resultado. Son expresiones distintas, como se puede ver fácilmente con un ejemplo numérico: si es $a=10$, $b=5$ y $c=2$ resulta:

$a-(b-c)=10-(5-2)=10-3=7$

mientras que

$a-b-c=10-5-2)=5-2=3$

★**Ejercicio** 11c), página 10:

Las operaciones hay que describirlas en el orden en que se irían resolviendo:

- Calcular la mitad de M.
- Sumar 4.
- Triplicar.
- Restarle a 1 la cantidad obtenida. (¿Es lo mismo decir “Restarle 1 a la cantidad obtenida”?)

★**Ejercicio** 12g), página 11:

Este tipo de ejercicios sirve para entender lo que las fórmulas dicen. La fórmula dice textualmente “Dos por: H1 más H2”, pero eso **no** es escribir en palabras lo que la fórmula dice. Las distintas fórmulas de este ejercicio modelizan el rendimiento de una impresora, en relación al rendimiento de otras dos. Entonces se trata de traducir lo que la fórmula nos dice, hablando de las impresoras. Por ejemplo:

“La impresora 3 imprime por minuto el doble de lo que imprimen las otras dos impresoras juntas.”

Busquen distintas formas de decir lo mismo: “Por más que se pongan a trabajar juntas las impresoras 1 y 2, la otra impresora sacará el doble de copias en el mismo tiempo”.

Puede ser divertido decirlo con distintos tonos: “Poné nomás tus impresoras a trabajar. La mía es mucho mejor: en el mismo tiempo que las tuyas sacan 50 copias uniendo los esfuerzos de las dos, la mía solita saca 100”.

★**Ejercicio** 14, página 11:

Acá se trata de operar:

$$\begin{aligned}(3+m)a-a(3-m) &= (3a+ma)-(3a-ma) && \text{Distribuir conservando los paréntesis.}\\ &= 3a+ma-3a+ma && \text{Suprimir paréntesis atendiendo a los signos.}\\ &= 2ma && \text{Sumar los términos que tienen las mismas variables.}\end{aligned}$$

★**Ejercicio** 16c), página 12:

Más ejemplos de operaciones:

$$\begin{aligned}(2x-3y)(5m-7n) &= 2x(5m-7n)-3y(5m-7n) && \text{Distributiva del segundo paréntesis en el primero.}\\ &= (2x5m-2x7n)-(3y5m-3y7n) && \text{Distributiva en cada término.}\\ &= (10mx-14nx)-(15my-21ny) && \text{Multiplicar en cada término.}\\ &= 10mx-14nx-15my+21ny && \text{Suprimir paréntesis.}\end{aligned}$$

La expresión obtenida es equivalente a la anterior, pero no requiere el uso de paréntesis. En distintas manipulaciones algebraicas puede ser conveniente presentar la expresión como estaba al principio o transformarla hasta obtener la expresión final. Es interesante practicar también el camino inverso: ¿cómo llegarías desde $10mx-14nx-15my+21ny$ hacia $(2x-3y)(5m-7n)$?

★**Ejercicio** 17g), página 12:

Como $z=10$; $w=-100$ y $t=-10$, la expresión $(0{,}5z+0{,}1w)/t$ evaluada resulta:

$$(0{,}5\cdot 10+0{,}1\cdot(-100))/(-10)=(5-10)/(-10)=-5/(-10)=0{,}5$$

★**Ejercicio** 18i), página 12:

Para realizar la suma de las expresiones fraccionarias $\frac{1}{x}+\frac{x}{x+1}$ es necesario obtener fracciones equivalentes:

$$\begin{aligned}\frac{1}{x}+\frac{x}{x+1} &= \frac{1}{x}\cdot\frac{x+1}{x+1}+\frac{x}{x+1}\cdot\frac{x}{x} && \text{Obtenemos fracciones equivalentes.}\\ &= \frac{x+1}{x(x+1)}+\frac{x^2}{x(x+1)} && \text{Ahora tenemos denominadores comunes y podemos sumar.}\\ &= \frac{x+1+x^2}{x(x+1)} && \text{Y obtuvimos la otra expresión de la pareja.}\end{aligned}$$

Hay que observar que estas expresiones están definidas, siempre que x no valga 0 o -1, porque en esos casos las operaciones desembocarían en una división por 0. Para cualquier valor numérico de x, distinto de 0 y -1, las expresiones están definidas y son iguales.

★**Ejercicio** 20c), página 12:

$$\begin{aligned} 3y-3(y-2) &= 3y-(3y-6) && \text{Distribuimos} \\ &= 3y-3y+6 && \text{Eliminamos paréntesis} \\ &= 6 && \text{Sumamos} \end{aligned}$$

El 6 obtenido significa que esta expresión algebraica vale 6 cualquiera sea el valor numérico de y, lo que, si quedan dudas, podés comprobar dándole valores a y y realizando las operaciones.

★**Ejercicio** 24c), página 13:

Es casi verdadero: $a/a = 1$, cualquiera sea el valor de a, a excepción del caso $a = 0$. En ese caso la igualdad $a/a = 1$ no se cumple, porque la división por 0 no está definida.

★**Ejercicio** 26e), página 13:

$x-3x$ es exactamente $-2x$, para cualquier valor de x. La expresión $x-3x = -2x$ es una **identidad algebraica**. Ése es el nombre que recibe una igualdad que es verdadera cualesquiera sean los valores de las variables que intervienen.

★**Ejercicio** 28a), página 14:

La ecuación $x^2 \cdot x^3 \cdot x^4 = \left(3^3\right)^3$ puede reescribirse como:

$x^{2+3+4} = 3^{3\cdot 3}$

de donde resulta:

$x^9 = 3^9$, por lo que se tiene que $x = 3$.

★**Ejercicio** 29e), página 14:

$(2m-3n^2)^2 = (2m)^2 - 2(2m)(3n^2) + (3n^2)^2 = 4m^2 - 12mn^2 + 9n^4$

★**Ejercicio** 34c), página 14:

Tenemos la ecuación $(x-3)^2 = x^2 - 3$

Desarrollando el cuadrado del binomio en el primer término se tiene:

$x^2 - 6x + 9 = x^2 - 3 \Rightarrow -6x + 9 = -3 \Rightarrow -6x = -12 \Rightarrow x = 2$

★**Ejercicio** 34e), página 14:

La verificación consiste en sustituir la solución $x = 2$ obtenida, en la ecuación original para comprobar si la misma se convierte en una igualdad.

En el primer miembro: $(x-3)^2 \overset{(x=2)}{=} (2-3)^2 = 1$

En el segundo miembro: $x^2 - 3 \overset{(x=2)}{=} 2^2 - 3 = 1$

Como en ambos miembros se obtuvo el mismo resultado, con $x = 2$ la ecuación se convierte en la identidad $1 = 1$, lo que comprueba que $x = 2$ es una solución de la ecuación.

Si, por algún error, se hubiera obtenido la solución $x = 1$ resultaría:

En el primer miembro: $(x-3)^2 \overset{(x=1)}{=} (1-3)^2 = 4$

En el segundo miembro: $x^2 - 3 \overset{(x=1)}{=} 1^2 - 3 = -2$

Como $4 \neq -2$ resulta que $x = 1$ **no es** una solución de la ecuación.

★**Ejercicio** 37g), página 15:

Dado un número $a \neq 0$, el número a^{-1} es aquél que verifica $a \cdot a^{-1} = 1$. Para $a = -\frac{5}{8}$ resulta $a^{-1} = -\frac{8}{5}$, pues

$$\left(-\frac{5}{8}\right)\left(-\frac{8}{5}\right) = 1$$

★**Ejercicio** 39m), página 15:

$x + 8 = 2x - 8 + 3x \Rightarrow x + 8 = 5x - 8 \Rightarrow 8 + 8 = 5x - x \Rightarrow 4x = 16 \Rightarrow x = 4$

Reemplazá $x = 4$ en la ecuación original para verificar la solución obtenida.

Fracciones

★**Ejercicio** 41j), página 17:

Este ejemplo permite ir en dos direcciones. Para generar una fracción equivalente lo más sencillo es multiplicar numerador y denominador por el mismo número (¡cualquiera que no sea cero!). Por ejemplo $\frac{10}{25} = \frac{2 \cdot 10}{2 \cdot 25} = \frac{20}{50}$. Pero esta fracción también nos da la idea de que en este caso se puede encontrar una fracción equivalente "yendo para el otro lado", es decir, dividiendo numerador y denominador por el mismo número. En este caso: 10, ya que si ambos, numerador y denominador, terminan en cero entonces son divisibles por 10 y obtenemos la fracción equivalente $\frac{2}{5}$. Claramente no podemos seguir "dividendo" esta fracción, lo que la convierte en *irreducible*, pero sí podemos ir para el "otro lado" multiplicándola, por ejemplo por 100, para obtener otra fracción equivalente: $\frac{200}{500}$.

★**Ejercicio** 42j), página 17:

La técnica más simple para ir reduciendo las fracciones es ir probando para ver si ambos, numerador y denominador, son divisibles por un mismo número. En este ejercicio tanto el numerador 2772 como el denominador 4158 son divisibles por 2. Luego de dividir ambos por 2 obtenemos un nuevo numerador, 1386, y un nuevo denominador, 2079. Ya no son ambos divisibles por 2 porque el denominador ahora quedó impar. Si ambos hubieran seguido siendo pares deberíamos haber seguido dividiendo por 2 hasta que uno de ambos o ambos, numerador y denominador, ya no fueran divisibles por 2. A continuación probamos a ver si son divisibles por 3. Ambos lo son, lo sabemos porque sus dígitos suman en cada caso un múltiplo de 3. Obtenemos un nuevo numerador, 462, y un nuevo denominador, 693. Ambos siguen siendo múltiplos de 3 así que los volvemos a dividir. Obtenemos un nuevo numerador, 154, y un nuevo denominador, 231. El numerador ya no es divisible por 3, entonces empezamos a ver si son divisibles por 5. Ya no probamos por 4 porque como ya no son ambos múltiplos de 2 tampoco podrían ser ambos múltiplos de 4. Tampoco son divisibles por 5 porque ninguno de los números termina en 0 ni en 5. Salteamos la prueba por 6 por las mismas consideraciones que hicimos con el 4. Probamos con el 7. Ambos son divisibles por 7 y obtenemos un nuevo numerador, 22, y un nuevo denominador, 33. Ya estamos muy cerca del final y podemos ver que ambos, numerador y denominador, son divisibles por 11. Dividimos ambos por 11 y finalmente obtenemos la fracción irreducible $\frac{2}{3}$.

★**Ejercicio** 43h), página 17:

Para resolver este ejercicio podemos poner en práctica diferentes tipos de propiedades. El plan es transformar la ecuación en una más sencilla que podamos resolver para establecer el valor de la variable x. Incialmente se puede "invertir" las fracciones de ambos lados del signo igual, cambiando en cada caso, numerador por denominador. ¿Por qué haríamos esta operación? El único cuidado que hay que tener es que los numeradores no sean cero porque no es admisible que queden denominadores cero, ya que no es posible dividir por cero. En este caso $\frac{2}{24} = \frac{3}{x}$ queda como $\frac{24}{2} = \frac{x}{3}$. Una operación que podríamos hacer antes o ahora es simplificar las fracciones que no estén escritas en su forma irreducible, como $\frac{24}{2}$ que podemos escribir como $\frac{12}{1}$ o directamente como el número 12. Ahora multiplicando a ambos lados de la igualdad por 3 obtenemos $3 \cdot 12 = 3\frac{x}{3}$. Cancelando los 3 que multiplican y dividen a la x obtenemos que $x = 36$.

★**Ejercicio** 44d), página 17:

Una forma de resolver este ejercicio es expresar el numerador (en este caso 178), como un número multiplicado por 5 (el denominador) sumado a un resto (que sea cero o positivo, pero menor que 5). Es decir que hay que buscar números enteros positivos q y r tales que $178 = q \cdot 5 + r$ con $0 \leq r < 5$. Una forma sencilla de hacerlo es hacer la división o cociente entre 178 y 5 con la calculadora. Tomar como valor de q el resultado de la cuenta sin los decimales. Luego restarle a 178 el resultado de multiplicar q por 5. Una vez que tenemos el denominador descompuesto de esta forma podemos reescribir la fracción $\frac{178}{5}$ como

$$\frac{35 \cdot 5 + 3}{5} = \frac{35 \cdot 5}{5} + \frac{3}{5} = 35 + \frac{3}{5}$$

Para el siguiente ejercicio la respuesta consiste en calcular qué fracción completa la unidad $\frac{3}{5}$. Esta fracción se construye con un numerador que es $2 = 5 - 3$ (la resta de denominador menos numerador) y el mismo denominador. En este caso $\frac{2}{5}$.

★**Ejercicio** 46f), página 18:

Este ejercicio admite muchas posibles estrategias o caminos que conducen a la solución. Una forma de pensarlo es estimando o calculando mentalmente los cocientes de cada lado del igual. Del lado izquierdo $\frac{13}{7}$ es algo menor que $2 = \frac{14}{7}$ por otro lado $\frac{13-5}{7-5} = \frac{8}{2} = 4$, es claramente mayor.

★**Ejercicio** 48e), página 18:

La primera tarea para resolver este ejercicio puede ser reducir las fracciones ya que en ambos casos numerador y denominador son pares. Obtenemos $\frac{2}{3}$ y $\frac{3}{4}$, un ejercicio de un ítem anterior. Una tradición matemática podría responder: hecho esto pasamos al caso anterior que suponemos resuelto. Pero como nos inscribimos en otras tradiciones lo vamos a resolver. Para ello vamos a construir una "fracción" cuyo numerador y denominador, estén a mitad de camino de los numeradores y denominadores de ambas fracciones $\frac{2{,}5}{3{,}5}$. Escribimos "fracción" entre comillas porque $\frac{2{,}5}{3{,}5}$ no es estrictamente una fracción, pero multiplicando numerador y denominador por 2 recuperamos una fracción $\frac{5}{7}$ que tiene la propiedad de tener un valor intermedio entre las dos fracciones originales.

★**Ejercicio** 49h), página 18:

La forma más sencilla de sumar dos fracciones que no tiene el mismo denominador consiste en transformarla en dos fracciones equivalentes que tengan el mismo denominador.

$$\frac{2}{3}+\frac{5}{7}$$

puede transformarse en multiplicando al denominador y numerador de la primera fracción por el denominador de la segunda y multiplicando al denominador y numerador de la segunda fracción por el denominador de la primera.

$$\frac{2\cdot 7}{3\cdot 7}+\frac{5\cdot 3}{7\cdot 3}=\frac{14}{21}+\frac{15}{21}$$

Las dos fracciones obtenidas con el mismo denominador permiten obtener la suma, procediendo a sumar los numeradores, conservando como denominador el denominador común a ambas fracciones.

$$\frac{14}{21}+\frac{15}{21}=\frac{14+15}{21}=\frac{29}{21}$$

★**Ejercicio** 50b), página 18:

Dada la ecuación

$$\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}=\frac{7}{2}$$

con el objeto de despejar la variable x para poder resolverla primero sumamos primero $\frac{1}{3}$ de cada lado de la igualdad.

$$\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{7}{2}+\frac{1}{3}$$

De esta forma se cancelan $-\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{3}$ del lado izquierdo de la igualdad

$$\frac{2}{3}x=\frac{7}{2}+\frac{1}{3}$$

Sumando las fracciones $\frac{7}{2}$ y $\frac{1}{3}$ obtenemos

$$\frac{2}{3}x = \frac{23}{6}$$

Finalmente multiplicando de ambos lados de la igualdad por $\frac{3}{2}$ obtenemos

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3}x = \frac{3}{2} \cdot \frac{23}{6}$$

Del lado izquierdo se cancelan $\frac{3}{2}$ y $\frac{2}{3}$ ya que su producto da 1 dejando la x sola del lado derecho $\frac{3}{2} \cdot \frac{23}{6}$ resulta igual a $\frac{23}{4}$

$$x = \frac{23}{4}$$

★**Ejercicio** 53i), página 19:

Este ejercicio llama primero a un deseo irresitible y fácil de satisfacer: simplificar para reducir la fracción llevándola a la de la forma $\frac{6700}{900}$ a la forma irreducible $\frac{67}{9}$. Una estrategia que podríamos poner en juego es buscar los múltiplos de 9 entre los que se encuentra el 67. Estos son 63 y 72. Por lo tanto, los enteros consecutivos entre los que se encuentra la fracción $\frac{6700}{900} = \frac{67}{9}$ son $\frac{63}{9} = 7$ y $\frac{72}{9} = 8$. Examinando la forma que utilizamos para llegar a la solución podemos ver que el 7 es el entero más cercano.

★**Ejercicio** 59g), página 20:

El método para pasar a fracción un número decimal con desarrollo periódico consiste en restar el número a un múltiplo del mismo de manera que el desarrollo periódico se cancele y nos quede un número con desarrollo finito. Como el $0,\overline{34}$ tiene un período de longitud 2 vamos a multiplicar a $0,\overline{34}$ por 100 de manera de “correr” la coma dos lugares. Obtenemos así $100 \cdot 0,\overline{34} - 0,\overline{34} = 34,\overline{34} - 0,\overline{34} = 34$ pero el 34 es 99 veces el número original (piensen por qué), de manera que

$$0,\overline{34} = \frac{34}{99}$$

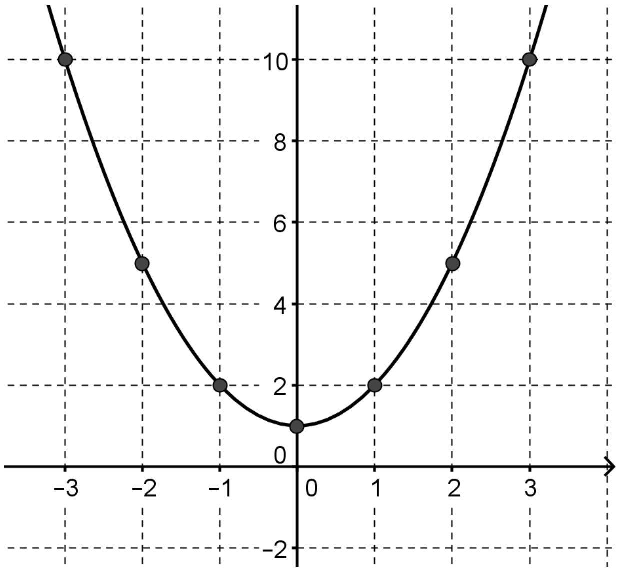
Tablas y gráficos

★**Ejercicio** 68, página 24:

Los puntos graficados tienen coordenadas $(-3, 10)$, $(-2, 5)$, $(-1, 2)$, $(0, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 5)$ y $(3, 10)$. Esto permite completar parte de la tabla de la siguiente manera:

x	-3	-2	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3	**-2**
$f(x)$	10	**5**	2	1		**2**	5	**10**	5

Observá que son dos los números que la función f transforma en 5. Pero la información $f(2) = 5$ ya venía en la tabla, por lo que asumimos que la faltante es $f(-2) = 5$. En la tabla no se repiten valores de x.
Por otra parte, no hay en la tabla datos que no hayan sido graficados, aunque a priori no podemos saber qué coordenada y le corresponderá al punto de coordenada $x = \frac{1}{2}$. Los pocos puntos de la tabla sugieren la forma de una curva que se llama parábola.
y es un conocimiento necesario el de saber que esas curvas corresponden a funciones cuadráticas (donde la variable x aparece elevada al cuadrado). Esta observación, sumada a la inspección cuidadosa de la tabla permite advertir que la ecuación $f(x) = y = x^2 + 1$ vincula a las dos variables. Con esto, resulta $f(\frac{1}{2}) = \frac{5}{4}$, por lo que $(\frac{1}{2}, \frac{5}{4})$ es un punto del gráfico (ubicalo) y esto permite completar el lugar de la tabla que faltaba.



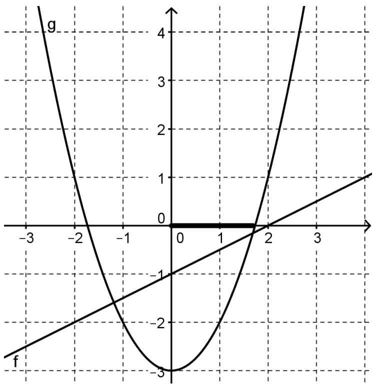
★**Ejercicio** 72b), página 25.

$f(x) = \frac{x}{2} - 1$ y $g(x) = x^2 - 3$. Podemos pensar este ejercicio desde la tabla o desde el gráfico:

- Construir una tabla. Por simple exploración, se observa que $f(x) > g(X)$, por ejemplo para $x = 1$.

x	$f(x)$	$g(x)$
-3	-3	6
-2	-2	1
-1	-2	-2
0	-1	-3
1	-1	-2
2	0	1
3	1	6

- Graficar las funciones: el segmento destacado en el gráfico muestra los puntos positivos del eje x para los cuales $f(x) > g(X)$. Desde luego, $x = 1$ es uno de ellos. Pero se ve que hay infinitos.



★**Ejercicio** 78a), página 25.

Tenemos que $f(x) = x^2 - x$ y queremos comparar $f(2x)$ con $2f(x)$. Podemos probar con algún valor de x y calcular las dos cantidades. Por ejemplo, uno fácil es $x = 1$. Con este valor, es:

$f(2x) = f(2 \cdot 1) = f(2) = 2^2 - 2 = 2$. Por otra parte, $2f(x) = 2f(1) = 2 \cdot 0 = 0$. Es decir: $f(2 \cdot 1) = 2 \neq 0 = 2f(1)$. Esto muestra que ya no es verdad que la igualdad $f(2x) = 2f(x)$ se verifique para *cualquier* valor de x.

★**Ejercicio** 79a), página 26.

La diferencia con el ejemplo anterior es que aquí se pregunta si la igualdad $f(2x) = 2f(x)$ se verifica para *algún* valor de x. Podemos investigarlo planteando una ecuación, es decir, afirmando que ese valor de x sí existe y tratando de descubrir cuál es:

$$f(2x) = 2f(x) \Rightarrow (2x)^2 - 2x = 2(x^2 - x) \Rightarrow 4x^2 - 2x = 2x^2 - 2x \Rightarrow 4x^2 = 2x^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 4x^2 - 2x^2 = 0 \Rightarrow 2x^2 = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Esto significa que la igualdad vale para $x = 0$ (y para ningún otro valor, ya que la ecuación tuvo una única solución).

★**Ejercicio** 81a), página 26.

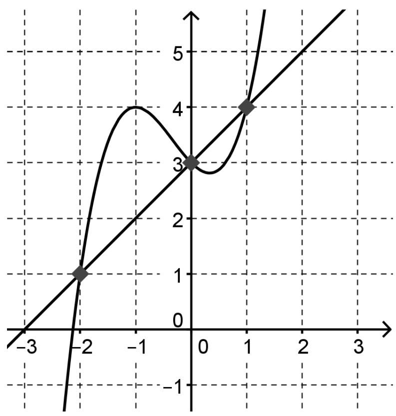
En los modelos de proporcionalidad directa es importante identificar e interpretar el valor de la constante de proporcionalidad. Por ejemplo, en la ecuación $f(x) = 4x$ las variables x y $f(x)$ son directamente proporcionales y 4 es la constante de proporcionalidad. Así, si x representa a una cantidad de autos y $f(x)$ representa a la cantidad de ruedas, podríamos decir que la cantidad de ruedas es directamente proporcional a la cantidad de autos y el 4 significa el número de ruedas que tiene un solo auto. la ecuación $f(x) = 4x$ permite calcular el número de ruedas conocida la cantidad de autos. En la ecuación más general $f(x) = kx$ la constante de proporcionalidad es k, que no está determinada porque podría valer 4 si el modelo representa la relación entre ruedas y vehículos, cuando los vehículos son autos, valer 3 si los vehículos son triciclos, 2 si son bicicletas, etc. Lo que muestra el ejemplo es que la constante de proporcionalidad puede aparecer en la ecuación como una expresión no numérica para describir una familia de situaciones posibles.

En este ejercicio tenemos la ecuación $C(t) = 5t + rt$. Las variables son C y t. Para que esto quede claro se aclara que la C depende de t mediante la notación $C(t)$. Extrayendo un factor común tenemos:

$C(t) = 5t + rt = (5 + r)t$, por lo que $k = 5 + r$ es la constante de proporcionalidad.

★**Ejercicio** 85, página 26.

Este ejercicio involucra a las funciones $f(x) = x^3 + x^2 - x + 3$ y $g(x) = x + 3$. La ecuación $x^3 + x^2 - x + 3 = x + 3$ expresa que para ciertos valores de x que deben ser determinados (si existen), es equivalente calcular tanto $x^3 + x^2 - x + 3$ como $x + 3$. Es decir, los puntos (x, y) que se obtengan para esos valores de x deben pertenecer tanto al gráfico de f como al de g. En el gráfico están destacados esos puntos y se aprecia que se trata de $(-2, 1)$, $(0, 3)$ y $(1, 4)$. Efectivamente, las soluciones de la ecuación $x^3 + x^2 - x + 3 = x + 3$ son $x = -2$, $x = 0$ y $x = 1$, ya que $f(-2) = g(-2) = 1$, $f(0) = g(0) = 3$ y $f(1) = g(1) = 4$.



Por otra parte, se podría resolver la ecuación en forma algebraica:

$x^3 + x^2 - x + 3 = x + 3 \Rightarrow x^3 + x^2 - x = x \Rightarrow x^3 + x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(x^2 + x - 2) = 0$. Esta igualdad se cumple si es $x = 0$ o bien si vale 0 el paréntesis: $x^2 + x - 2 = 0$. Esta última ecuación tiene las soluciones $x = -2$ y $x = 1$ y podés calcularlas si sabés cómo resolver ecuaciones cuadráticas. De lo contrario, podrás practicarlo en la unidad correspondiente.

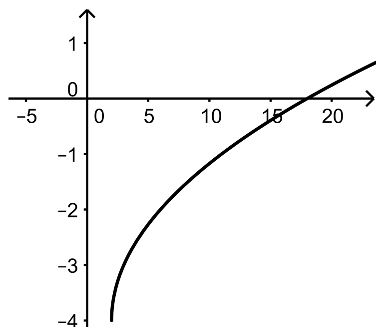
★**Ejercicio** 89a), página 27.

Planteamos la ecuación:	$\sqrt{x-2} - 4 = 0$
Sumando 4:	$\sqrt{x-2} = 4$
Elevando al cuadrado:	$x - 2 = 16$
Sumando 2:	$x = 18$

En efecto, $\sqrt{18-2} - 4 = \sqrt{16} - 4 = 4 - 4 = 0$.

★**Ejercicio** 90, página 27.

Vamos a pensar en el gráfico correspondiente a la ecuación $f(x) = 0$ para la $f(x) = \sqrt{x-2} - 4$ del ejemplo anterior. Obtuvimos como solución $x = 18$. Lo que significa que $f(18) = 0$ y que entonces el punto $(18, 0)$ debe estar en el gráfico de f. El único de los gráficos que podría contener a dicho punto es el que reproducimos aquí.



Otros aspectos del gráfico que permiten identificarlo con la función $f(x) = \sqrt{x-2} - 4$ son los siguientes:

- La raíz solo está definida para números no negativos. Lo que significa que solo pueden evaluarse en la función valores de x mayores o iguales a 2. Eso explica que el gráfico "comience" en el punto $(2, -4)$.
- La curva va creciendo conforme crece el valor de x. Esto es porque cuanto más grande es un número, mayor es su raíz cuadrada.

★**Ejercicio** 91f), página 28.

La ecuación $g(t) = a$, con $g(t) = -\frac{24}{t-1}$ y $a = 6$ se escribe:

Planteamos la ecuación:	$-\dfrac{24}{t-1} = 6$
Multiplicando por $t - 1$:	$-24 = 6(t-1)$
Dividiendo por 6:	$-4 = t - 1$
Sumando 1:	$-3 = t$

Verificá que la solución es correcta poniendo $t = -3$ en la ecuación original y operando numéricamente.

★**Ejercicio** 92, página 28.

La misma ecuación del ejemplo anterior se puede resolver para cualquier valor de a. Si vas siguiendo los pasos en comparación con el ejemplo anterior, podrás advertir que los parámetros (letras) se pueden arrastrar en los cálculos sin ningún inconveniente. La ventaja es que estás resolviendo toda una familia de ecuaciones, ya que a puede representar a distintos números:

La ecuación $g(t) = a$, con $g(t) = -\frac{24}{t-1}$ se escribe:

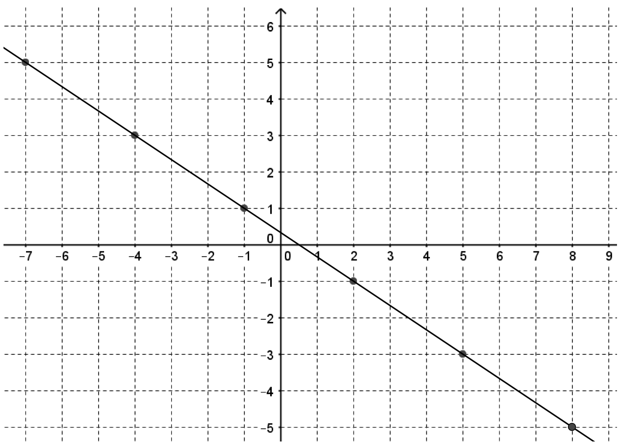
Planteamos la ecuación:	$-\dfrac{24}{t-1} = a$
Multiplicando por $t-1$:	$-24 = a(t-1)$
Dividiendo por a:	$-\dfrac{24}{a} = t-1$
Sumando 1:	$-\dfrac{24}{a} + 1 = t$

Así, $t = -\frac{24}{a}+1$ es la solución para cualquier valor de a, a excepción de $a = 0$. Esto se puede advertir en el paso en que se dividió por a, ya que la división por 0 no está definida. Pero fundamentalmente se puede advertir en la ecuación original, donde es claro que la expresión $-\frac{24}{t-1}$ nunca podrá valer 0, para ningún valor de t.

Modelos lineales

★**Ejercicio** 93e), página 29.

“El doble de la coordenada x más el triple de la coordenada y es 1.” Dos puntos que cumplen esta condición son el $(\frac{1}{2}, 0)$ y $(0, \frac{1}{3})$. El gráfico muestra otros que, según se puede chequear, cumplen también la condición.



★**Ejercicio** 96c), página 29.

$f(-2) = 1, f(4) = 13$ significa que dos puntos de la recta son $(x, y) = (-2, 1)$ y $(x, y) = (4, 13)$. Como la recta responde a una ecuación del tipo $f(x) = mx + b$, debe suceder que

$$\begin{cases} -2m + b = 1 \ \ (1) \\ 4m + b = 13 \ \ (2) \end{cases}$$

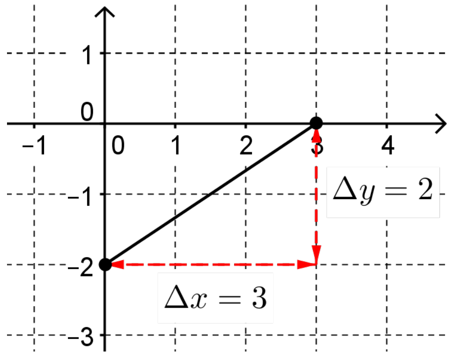
Restando miembro a miembro (1) y (2) queda: $-6m = -12 \Rightarrow m = 2 \overset{(1)}{\Rightarrow} b = 5$

Por lo tanto $f(x) = 2x + 5$

★**Ejercicio** 98d), página 30.

El segmento graficado permite ver que desde el punto $(0, -2)$ hacia el punto $(3, 0)$ se puede llegar avanzando 3 unidades hacia la derecha y 2 unidades hacia arriba (ver figura). La relación (cociente) entre el incremento en la dirección del eje y y el incremento en la dirección del eje x es $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2}{3}$ y es precisamente el valor de la pendiente m. Por otra parte, si $f(x) = mx + b$ entonces $f(0) = 0x + b = b$. Eso significa que el punto $(0, b)$ es siempre un punto del gráfico de f. En este caso $f(0) = b = -2$. Por lo tanto, como es $m = \frac{2}{3}$ y $b = -2$, resulta

$$f(x) = \frac{2}{3}x - 2$$



★**Ejercicio** 99f), página 31.

Es similar al Ejercicio 98d). Acá la pendiente m no se puede establecer por conteo directo de cuadraditos en el gráfico, porque la escala no permite verlos todos. Pero se puede calcular que por cada aumento $\Delta x = 150 - 100 = 50$ hay un decrecimiento $\Delta y = -100 - (-50) = -50$. De esta manera, la pendiente es $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-50}{50} = -1 = m$. El corte de la recta con el eje y se produce en $(0, 50)$, por lo que es $b = 50$ y resulta $f(x) = -x + 50$.

Si se observa el segmento del gráfico en este ejercicio, sus extremos tienen coordenadas $(100, -50)$ y $(150, -100)$. Teniendo esto en cuenta, la fórmula de la función lineal también se puede buscar con el procedmiento propuesto para el Ejercicio 96c).

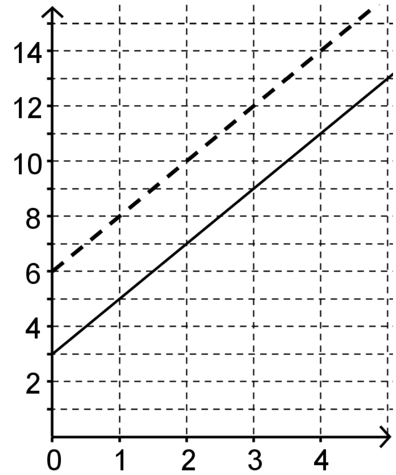
★**Ejercicio** 100b), página 32.

En la ecuación general $f(x) = mx + b$ tenemos que $m = -1$ y que $(-3, 4)$ es un punto de la recta. Por lo tanto, $f(-3) = (-1)(-3) + b = 4 \Rightarrow 3 + b = 4 \Rightarrow b = 1$. Y entonces $f(x) = -x + 1$.

★**Ejercicio** 101a), página 32.

La función $r(t) = 2t + 3$ da la posición de un móvil en función del tiempo. En el gráfico es la recta de trazo continuo. La recta de trazo punteado es paralela. Eso se debe a que los móviles van a la misma velocidad: recorren iguales distancias en iguales intervalos de tiempo. Pero para cada instante de tiempo la recta punteada muestra que el móvil 3 unidades más adelante que lo que muestra la recta continua. Si $s(t)$ es la posición del segundo móvil, la tabla muestra cómo se vinculan las dos funciones:

t	$r(t)$	$s(t)$
0	3	6
1	5	8
2	7	10
3	9	12
...	...	...



Por lo tanto $s(t) = 2t + 6$

★**Ejercicio** 102c), página 32.

"El cargo mensual de un celular es $200 + 0{,}53n$ pesos, donde n es la cantidad de minutos de conversación telefónica." La razón de cambio es $0{,}53$. Es la pendiente de una recta: el gráfico de la función que describe cómo varía el cargo mensual del celular con los minutos de conversación. El número $0{,}53$ representa el precio del minuto de conversación telefónica: 1 min cuesta $\$0{,}53$; 2 min cuestan $\$1{,}06$; 3 min cuestan $\$1{,}59$; etc. El valor inicial es 200. Es el costo que la fórmula asigna a $n = 0$. Significa que si una persona no usa el celular para conversar por teléfono (habla 0 min) igual pagará un costo fijo de $\$200$.

★**Ejercicio** 103, página 32.

Se podría preguntar, por ejemplo:

- ¿Cuál es el costo mensual si un usuario habló 42 minutos en todo el mes?
- ¿Cuál es el costo mensual si habló 6 horas con 15 min?
- ¿Cuánto tiempo puede hablar como máximo si no puede gastar más de $\$273$?
- ¿Cuál es la mayor tarifa que podrían cobrarle en un mes?

Es importante distinguir de las preguntas que no podemos responder, que no tendrían que ver con el funcionamiento del modelo matemático y que no son válidas para este ejercicio:

- ¿Cuánta memoria tiene el teléfono celular?
- ¿Cuántos contactos tiene el usuario en su agenda?
- ¿Cómo se llama el dueño del teléfono?
- ¿Por qué la empresa no tiene una tarifa más económica?

★**Ejercicio** 106a), página 32.

Este ejercicio pregunta de otra manera (bastante parecida) lo mismo que el Ejercicio 100b). Mirando la solución de aquel caso tendrías que poder resolver éste.

★**Ejercicio** 108c), página 33.

Para escribir $f(x) = \frac{-2x+1}{5} + \frac{2}{3}$ en la forma $f(x) = mx + b$, hay que manipular la expresión hasta convertirla en otra equivalente, en la que m y b se puedan identificar:

$$f(x) = \frac{-2x+1}{5} + \frac{2}{3} = \frac{-2x}{5} + \frac{1}{5} + \frac{2}{3} = -\frac{2}{5}x + \frac{1}{5} + \frac{2}{3} = -\frac{2}{5}x + \frac{13}{15}.$$

Es decir: $f(x) = -\frac{2}{5}x + \frac{13}{15}$, que tiene pendiente $m = -\frac{2}{5}$ y ordenada a al origen $\frac{13}{15}$.

★**Ejercicio** 109, página 33.

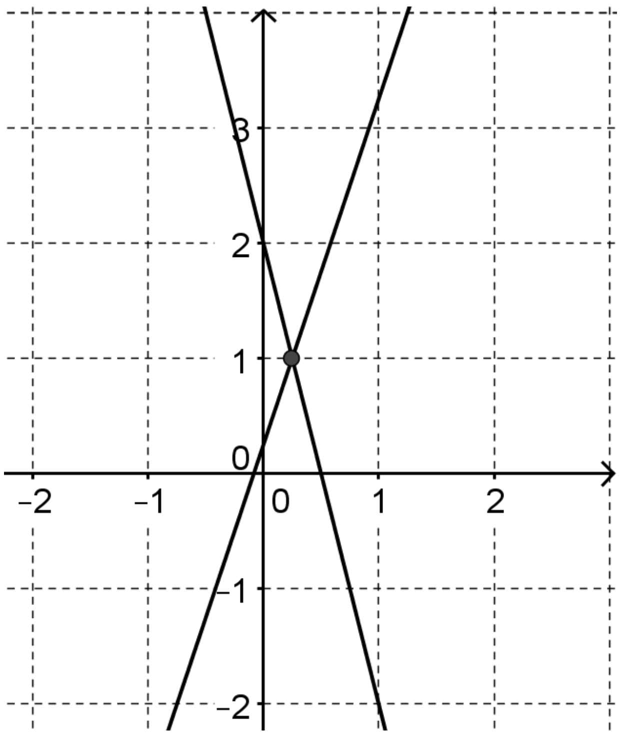
Para escribir $\frac{x}{4} - \frac{y}{\frac{1}{3}} = 1$ en la forma $y = mx + b$ es necesario despejar la y de la ecuación:

$$\frac{x}{4} - \frac{y}{\frac{1}{3}} = 1 \Rightarrow \frac{x}{4} - 1 = \frac{y}{\frac{1}{3}} \Rightarrow (\frac{x}{4} - 1)\frac{1}{3} = y \Rightarrow \frac{x}{4}\frac{1}{3} - \frac{1}{3} = y \Rightarrow \frac{x}{12} - \frac{1}{3} = y \Rightarrow \frac{1}{12}x - \frac{1}{3} = y.$$

Por lo tanto:

$$y = \frac{1}{12}x - \frac{1}{3}$$

★**Ejercicio** 112d), página 33.



El gráfico muestra las dos rectas (¿cuál es cada una?) y el punto en que se cruzan. La coordenada x de ese punto de intersección no coincide exactamente con la cuadrícula: no es un número entero. Es algún número entre 0 y 1. La coordenada y parece ser $y = 1$. Pero si fuera $1,01$ no lo podríamos distinguir a simple vista. Por eso resolvemos el problema en forma analítica.

Tenemos las dos funciones:

$$\begin{cases} f(x) = -4x + 2 \ \ (1) \\ g(x) = 3x + \frac{1}{4} \ \ (2) \end{cases}$$

Para cierto valor de x que por ahora desconocemos, debe ser $g(x) = f(x)$. Es decir:

$$3x + \frac{1}{4} = -4x + 2 \Rightarrow 3x + 4x = 2 - \frac{1}{4} \Rightarrow 7x = \frac{7}{4} \Rightarrow x = \frac{1}{4}$$

Podemos ahora averiguar la coordenada y del punto de intersección: $f(\frac{1}{4}) = -4(\frac{1}{4}) + 2 = -1 + 2 = 1$.

Por supuesto, también $g(\frac{1}{4}) = 3\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1$.

Por lo tanto, el punto de intersección es $(\frac{1}{4}, 1)$.

★**Ejercicio** 114g), página 35.

Tenemos las ecuaciones:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{2a} = 1 \tag{7.1}$$

y

$$\frac{x}{2b} + \frac{y}{b} = 1 \tag{7.2}$$

Multiplicando la ecuación (7.1) miembro a miembro por $2a$ y la ecuación (7.2) miembro a miembro por $2b$ obtenemos:

$$2x + y = 2a \Rightarrow y = 2a - 2x \tag{7.3}$$

y

$$x + 2y = 2b \tag{7.4}$$

Reemplazando (7.3) en (7.4) obtenemos:

$$x + 2(2a - 2x) = 2b \Rightarrow x + 4a - 4x = 2b \Rightarrow 4a - 3x = 2b \Rightarrow x = \frac{4a - 2b}{3} \tag{7.5}$$

Finalmente, poniendo (7.5) en (7.3) resulta:

$$y = 2a - 2\frac{4a - 2b}{3} = 2a - \frac{8a}{3} + \frac{4b}{3} = \frac{4b - 2a}{3} \tag{7.6}$$

Así, los valores de x e y que verifican simultáneamente las ecuaciones (7.1) y (7.2) son:

$$x = \frac{4a - 2b}{3} \qquad \text{e} \qquad y = \frac{4b - 2a}{3}$$

Modelos cuadráticos

★**Ejercicio** 116, página 37.

Todas las funciones cuadráticas se pueden definir mediante una fórmula del tipo

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

donde a, b y c son números fijos (se llaman **coeficientes**), mientras que x es la variable. Además, debe ser $a \neq 0$ (¿Por qué?). Por ejemplo, la ecuación c) del problema es

$$f(x) = 2x^2 - 7x - 4$$

En esta ecuación los coeficientes son $a = 2$, $b = -7$ y $c = -4$.

Queremos ver si las otras ecuaciones corresponden a la misma función. Para eso podemos considerar la siguiente

Definición 1 *Dos funciones cuadráticas definidas de los reales en los reales son **iguales** si cuando sus fórmulas se escriben en la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ los coeficientes son iguales.*

Para poder comparar las demás ecuaciones, necesitamos llevarlas, entonces, a la forma (A). Veamos cómo hacerlo con cada una de ellas.

Ecuación *a*) $f(x) = (x-4)\cdot(2x+1)$. Multiplicamos mediante la propiedad distributiva.

$$\begin{aligned}(x-4)\cdot(2x+1) &= 2x^2+x-8x-4\\ &= 2x^2-7x-4,\end{aligned}$$

por lo que la función de ecuación *a*) es efectivamente igual a la de ecuación *c*).

Ecuación *b*) $f(x) = (x-4)\cdot 2x+1$. También multiplicamos mediante la propiedad distributiva, pero teniendo en cuenta la separación en terminos.

$$(x-4)\cdot 2x+1 = 2x^2-8x+1,$$

que es evidentemente distinta de la ecuación *c*).

Ecuación *d*) $f(x) = 2(x-\frac{7}{4})^2-\frac{81}{8}$. Desarrollamos primero el cuadrado del binomio y luego multiplicamos por 2.

$$\begin{aligned}2\left(x-\frac{7}{4}\right)^2-\frac{81}{8} &= 2\left(x^2-2\cdot\frac{7}{4}x+\left(\frac{7}{4}\right)^2\right)-\frac{81}{8}\\ &= 2\left(x^2-\frac{7}{2}x+\frac{49}{16}\right)-\frac{81}{8}\\ &= 2x^2-7x+\frac{49}{8}-\frac{81}{8}\\ &= 2x^2-7x-\frac{32}{8}\\ &= 2x^2-7x-4,\end{aligned}$$

que –al igual que la ecuación *a*)– es equivalente a la *c*).

★**Ejercicio** 122, página 38.

Resolvamos la primera ecuación:

$$x^2-9=0$$

Vamos a “despejar” x:

$$x^2=9$$

Aquí debemos buscar que número elevamos al cuadrado para que nos dé 9 como resultado, es evidente que los resultados son $x=3$, pues $3^2=9$, y $x=-3$, pues $(-3)^2=9$. Veamos ahora el procedimiento realizado:

$$x=\pm\sqrt{9}$$

Esto es $x=\sqrt{9}=3$ o $x=-\sqrt{9}=-3$.

Trabajemos ahora con la segunda ecuación:

$$x^2 - 3x = 0$$

Si sacamos factor común x nos queda la siguiente expresión:

$$x \cdot (x - 3) = 0$$

Notemos que el producto de dos términos nos va a dar cero cuando uno de ellos sea cero (o lo sean ambos). De esta manera observamos que las posibilidades que se nos presentan son que $x = 0$ o $x - 3 = 0$. Resolviendo cada una de estas ecuaciones obtenemos las soluciones de la ecuación cuadrática, en este caso $x = 0$ y $x = 3$. ★**Ejercicio** 125, página 39.

Para expresar $a(x - x_1) \cdot (x - x_2)$ en la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ basta con distribuir:

$$\begin{aligned} f(x) = a(x - x_1) \cdot (x - x_2) &= a(x^2 - x_1x - x_2x + x_1x_2) \\ &= a(x^2 + (-x_1 - x_2)x + x_1x_2) \\ &= ax^2 + a(-x_1 - x_2)x + ax_1x_2 \\ &= ax^2 + bx + c \end{aligned}$$

donde $b = a(-x_1 - x_2)$ y $c = ax_1x_2$

★**Ejercicio** 127c), página 39.

$$\begin{aligned} f(x) = 2x^2 + 4x + 11 &= 2(x^2 + 2x + \tfrac{11}{2}) \\ &= 2(x^2 + 2x + 1 - 1 + \tfrac{11}{2}) \\ &= 2[(x^2 + 2x + 1) + (-1 + \tfrac{11}{2})] \\ &= 2[(x + 1)^2 + (\tfrac{9}{2})] \\ &= 2(x + 1)^2 + 9 \end{aligned}$$

A lo largo del proceso es muy fácil confundirse con algún signo u otro detalle. Lo más prudente, como siempre, es verificar. Para eso se puede deshacer el proceso distribuyendo:

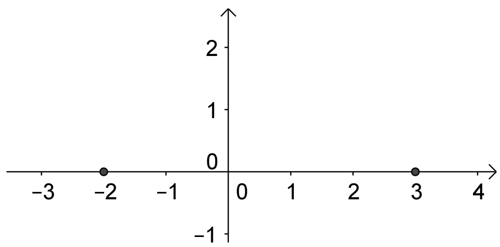
$$\begin{aligned} f(x) = 2(x + 1)^2 + 9 &= 2(x^2 + 2x + 1) + 9 \\ &= 2x^2 + 4x + 2 + 9 \\ &= 2x^2 + 4x + 11 \end{aligned}$$

★**Ejercicio** 128a), página 39.

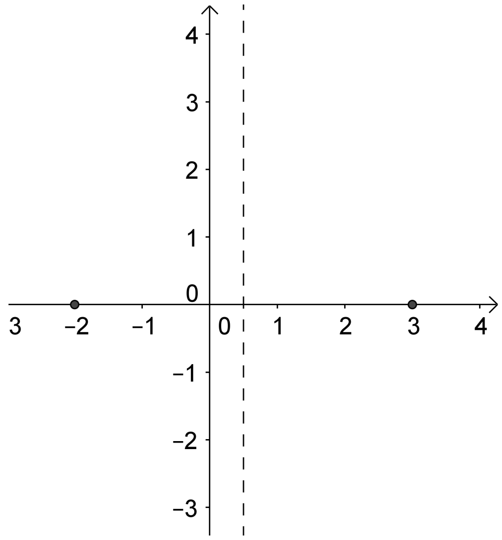
Veremos el caso de la función g_1. Las otras dos quedan a tu cargo. La expresión que recibimos es $g_1(x) = \frac{1}{2}(x - 3)(x + 2)$. En esta forma factorizada de la fórmula de g_1, lo primero que salta a la vista son las raíces. En efecto, si buscamos los x tales que

$$\frac{1}{2}(x - 3)(x + 2) = 0$$

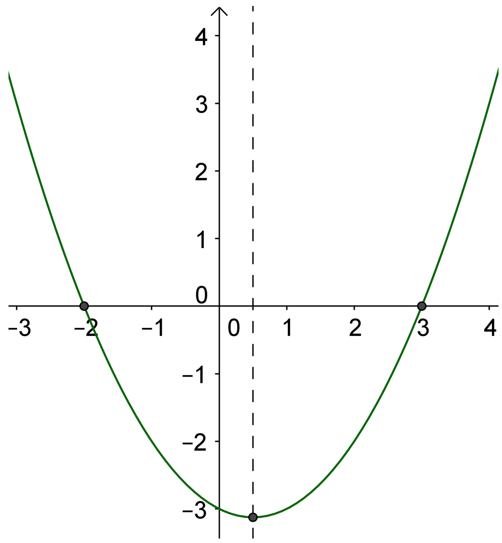
Este producto vale 0 si es 0 alguno de los factores. Esto sucede para el segundo factor, cuando es $x = 3$ y para el tercer factor, cuando es $x = -2$. Luego, las raíces de g_1 son $x_1 = -2$ y $x_2 = 3$, lo que se ilustra en el gráfico de la derecha.



El eje de simetría corta al eje x en un punto x_V que está a mitad de camino entre las raíces. Es decir, es el promedio de las mismas: $x_V = \frac{x_1+x_2}{2}$. En este caso el eje de simetría corta al eje x en $x_V = \frac{-2+3}{2} = \frac{1}{2}$. El eje de simetría aparece graficado acá a la derecha.



El vértice tiene coordenadas $(x_V, g_1(x_V))$. Como $g_1(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}-3)(\frac{1}{2}+2) = -\frac{25}{8}$. Resulta que el vértice es el punto $V = (\frac{1}{2}, -\frac{25}{8})$. La figura de la derecha muestra este punto y, finalmente, la manera en que la parábola se puede trazar por esos tres puntos importantes que identificamos.



★**Ejercicio** 131b), página 40.

El problema se puede pensar de distintas maneras. Por ejemplo, si 380 fuera el producto de dos números iguales, ese único número sería $\sqrt{380}$. Pero se sobreentiende que los números buscados son enteros (el concepto de *números consecutivos* requiere que lo sean) y $\sqrt{380} \approx 19{,}49$, lo que sugiere que los números consecutivos pueden ser 19 y 20. Esto es fácil de verificar, pues, en efecto, $19 \times 20 = 380$.

Otro camino consiste en construir una ecuación. Dos números consecutivos son, en general, n y $n+1$. Por lo tanto el producto de ellos es $n(n+1)$. Es decir, debe cumplirse que

$$n(n+1) = 380$$

Esta ecuación se puede llevar a la forma $n^2 + n - 380 = 0$ y obtener sus soluciones mediante la fórmula resolvente. Desde luego, resultan ser 19 y 20.

★**Ejercicio** 133a), página 41.

La curva debe pasar por los puntos $A = (1,2)$, $B = (2,5)$ y $C = (5,-1)$. Sabemos que su ecuación es de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$. Poniendo las coordenadas (x, y) de los puntos dados en esa fórmula tenemos:

$$\begin{aligned} 1^2a + 1b + c &= 2 \\ 2^2a + 2b + c &= 5 \\ 5^2a + 5b + c &= -1 \end{aligned}$$

Es decir:

$$\begin{aligned} a + b + c &= 2 && (7.7) \\ 4a + 2b + c &= 5 && (7.8) \\ 25a + 5b + c &= -1 && (7.9) \end{aligned}$$

Ahora se trata de resolver un problema de 3 ecuaciones lineales con 3 incógnitas. Esto puede hacerse de muchas maneras equivalentes. Proponemos una de las tantas posibles.

Restamos miembro a miembro las ecuaciones (7.8) y (7.7):

$$4a + 2b + c - (a + b + c) = 5 - 2,$$

de donde resulta

$$3a + b = 3$$

Restamos miembro a miembro las ecuaciones (7.9) y (7.8):

$$25a + 5b + c - (4a + 2b + c) = -1 - 5,$$

de donde resulta $21a + 3b = -6$, o bien, dividiendo por 3:

$$7a + b = -2$$

Con este procedimiento hemos pasado de tener un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas a tener un sistema de 2 ecuaciones con 2 incógnitas:

$$\begin{aligned} 3a + b &= 3 && (7.10) \\ 7a + b &= -2 && (7.11) \end{aligned}$$

Una vez más, restamos miembro a miembro (7.11) y (7.10), obteniendo $4a = -5$, de donde resulta:

$$a = -\frac{5}{4} \tag{7.12}$$

Reemplazando este valor en la ecuación (7.10) se tiene $3 \cdot (-\frac{5}{4}) + b = 3$, por lo que es

$$b = \frac{27}{4} \tag{7.13}$$

Finalmente, poniendo los valores de (7.12) y (7.13) en (7.7) resulta $-\frac{5}{4} + \frac{27}{4} + c = 2$, de donde se puede despejar c como:

$$c = -\frac{7}{2} \tag{7.14}$$

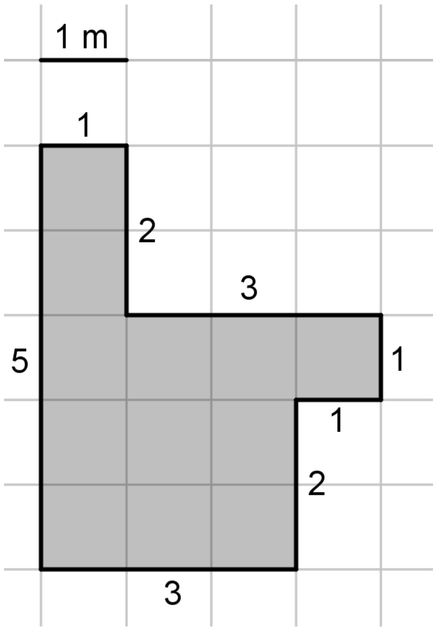
Con los valores de a, b y c obtenidos, la ecuación de la función cuadrática buscada es:

$$f(x) = -\frac{5}{4}x^2 + \frac{27}{4}x - \frac{7}{2} \tag{7.15}$$

Geometría

★**Ejercicio** 135, página 43.

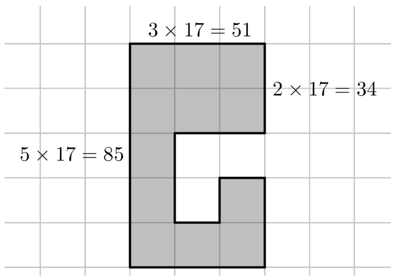
Elegimos una de las figuras. El perímetro es la suma de las medidas de los segmentos que forman el borde de la figura. En el nuevo gráfico esas medidas están indicadas sin unidades. Pero la unidad de longitud que, según se indica, se pide utilizar es el metro (m). El cuadriculado está formado por cuadraditos de 1 de lado. Como $1+2+3+1+1+2+3+5=18$, el perímetro de la figura es $P=18$ m.
Por otra parte la unidad de área es el metro cuadrado (m^2). Medir la superficie de la figura es averiguar cuántos cuadraditos de 1 m de lado caben en ella. Para esta figura se pueden contar a mano uno por uno: son en total 12. El área de la figura es 12 m^2.



★**Ejercicio** 136, página 43.

Elegimos una de las figuras. En este caso se indica que el cuadriculado está formado por cuadraditos de 17 m de lado. En la figura se indica cuánto miden, en consecuencia, algunos de los lados de la figura. La cuenta completa es

$$3\times17+2\times17+2\times17+2\times17+17+17+17+$$
$$+2\times17+3\times17+5\times17=22\times17=374$$



Observá que se puede calcular el perímetro como en el ejercicio anterior y multiplicar el resultado por 17, al final:

$$(3+2+2+2+1+1+1+2+3+5)\times17=$$
$$=22\times17=374$$

Esto ilustra la conocida propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma:

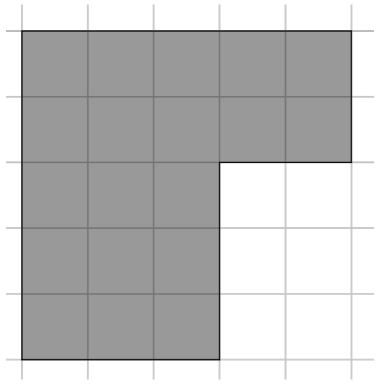
$$(3+2+2+2+1+1+1+2+3+5)\times17=$$
$$=3\times17+2\times17+2\times17+2\times17+17+17+17+2\times17+3\times17+5\times17$$

Respecto del área, la figura está formada por 12 cuadraditos de 17 m de lado. El área de cada cuadradito, expresada en m^2, es (17×17) m^2 $=289$ m^2. Por lo tanto, como es $12\times289=3468$, resulta que el área de la figura es 3468 m^2.

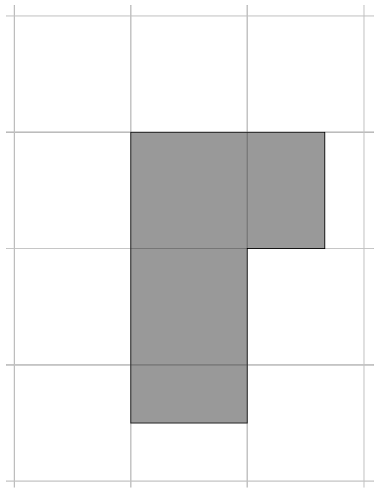
★**Ejercicio** 138, página 44.

En este ejercicio es importante comprender la siguiente convención: obtendremos áreas y perímetros efectuando cálculos y no midiendo con una regla. Por lo tanto, no se supone que las medidas indicadas en las figuras coincidan con lo que nuestros ojos nos muestran. Es bastante obvio que un lado de un cuadradito de la figura del Ejercicio 136 no puede medir 17 m, pues no cabría en el aula.

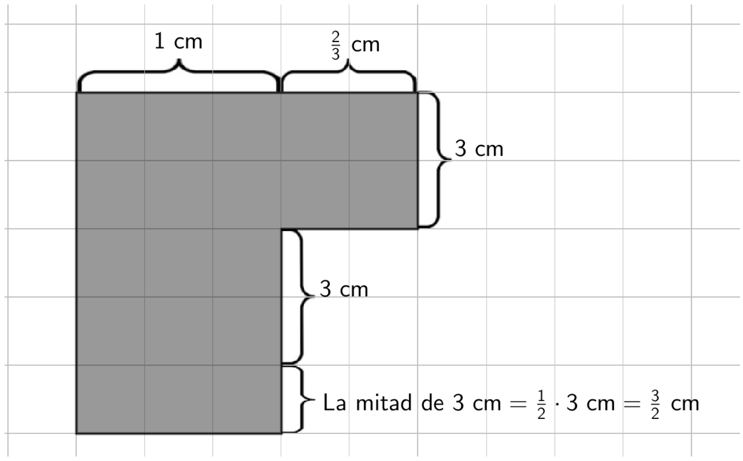
Pero en este caso, no solo las medidas están "falseadas", sino también las proporciones. Observá la primera de las cuatro figuras:



El segmento horizontal r abarca 3 cuadraditos y mide (según se informa) 1 cm. El segmento vertical s abarca 2 cuadraditos y mide (según se informa) 3 cm. Si la cuadrícula estuviera en estas proporciones, de manera que cada cuadradito midiera 1 cm, la figura se debería ver así:



Pero no es necesario poder efectuar esta transformación de escalas para calcular el área y el perímetro. Se puede hacer trabajando sobre la figura original. En ella indicamos las medidas que se obtienen de la comparación con los segmentos r y s.



En la siguiente suma, se indican con un asterisco las medidas que están indicadas en la figura. Los demás términos corresponden a los lados que no están señalados en la figura, pero que se pueden deducir comparando con los demás:

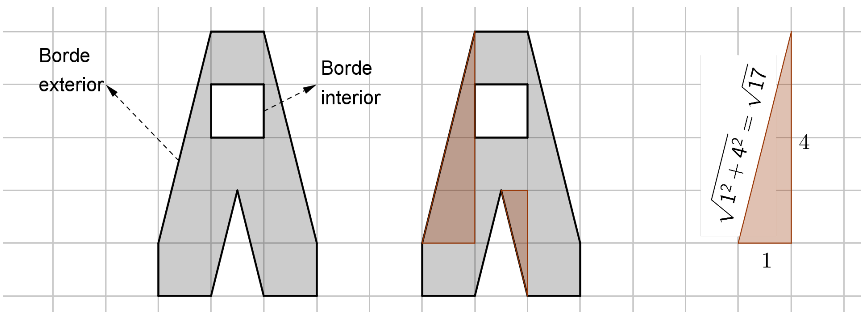
$$\underbrace{1}_{*} + \underbrace{\frac{2}{3}}_{*} + \underbrace{3}_{*} + \frac{2}{3} + \underbrace{3}_{*} + \underbrace{\frac{3}{2}}_{*} + 1 + \left(3 + 3 + \frac{3}{2}\right) = \frac{97}{6}$$

Por lo tanto, el perímetro de la figura es $\frac{97}{6}$ cm.

Respecto del área, cada cuadradito de la figura es en realidad un rectángulo con un lado horizontal de $\frac{1}{3}$ cm y un lado vertical de $\frac{3}{2}$ cm. Como $\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$, el área de cada uno de ellos es $\frac{1}{2}$ cm^2. Como la figura está formada por 19 de dichos rectángulos y $19 \cdot \frac{1}{2} = \frac{19}{2}$, resulta que el área total es $\frac{19}{2}$ cm^2.

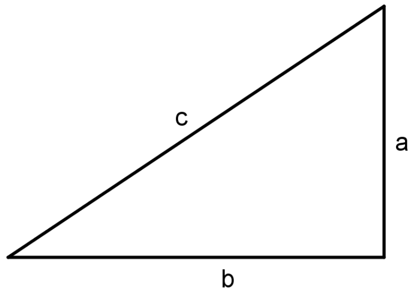
★**Ejercicio** 140, página 44.

Elegimos una de las figuras, por ejemplo, la cuarta. Su perímetro está formado por dos partes que podríamos llamar borde exterior y borde interior. El borde interior es un cuadrado de 1 m de lado, por lo que su perímetro es 4 m. El borde exterior tiene cinco tramos de 1 m de longitud, pero también tiene tramos que no son paralelos a las líneas de la cuadrícula. Hay que pensarlos como hipotenusas de triángulos rectángulos:



Según el teorema de Pitágoras, en cualquier triángulo rectángulo de catetos a y b e hipotenusa c se verifica

$$a^2 + b^2 = c^2$$



El triángulo marcado en la figura tiene catetos de 1 cm y 4 cm. Su hipotenusa H es uno de los lados de la letra A del ejercicio. Como $H^2 = 1^2 + 4^2 = 17$, resulta $H = \sqrt{17}$ cm.

El otro triángulo rectángulo destacado tiene catetos de 2 cm y $\frac{1}{2}$ cm, por lo que resulta:

$$H = \sqrt{2^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{17}{4}} = \frac{\sqrt{17}}{2}.$$

Por lo tanto la suma de las medidas de todos los lados de la letra A es:

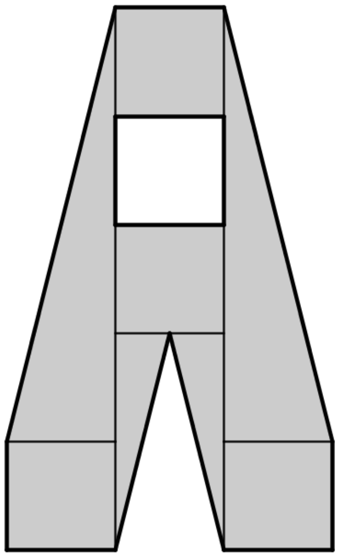
$$\underbrace{4}_{\text{Borde int.}} + 5 + 2 \cdot \sqrt{17} + 2 \cdot \frac{\sqrt{17}}{2} = 9 + 3\sqrt{17}$$

Es decir, el perímetro es $(9 + 3\sqrt{17})$ cm.

Para calcular el área se puede proceder al menos de dos maneras distintas.

Camino 1: armar rectángulos.

Se puede imaginar la pieza con forma de A formada como un rompecabezas de triángulos y rectángulos, como muestra la figura. Los dos triángulos rectángulos mayores permiten armar un rectángulo de 1×4, cuya área es entonces 4 cm^2. Los dos triángulos rectángulos menores permiten armar un rectángulo de $2 \times \frac{1}{2}$, cuya área es entonces 1 cm^2. Por último, hay cuatro cuadraditos de área 1 cm^2. Como $4 + 1 + 4 = 9$, el área de la figura es 9 cm^2.



Camino 2: calcular áreas.

Con la misma división en rectángulos y triángulos que la que se mostró en el camino anterior, se pueden calcular las áreas de las piezas por separado y luego sumar todas. Para ello hay que recordar:

Área del rectángulo = base × altura   Área del triángulo = $\frac{\text{base} \times \text{altura}}{2}$

★**Ejercicio** 142, página 45.

Elegimos uno de los rectángulos, a modo de ejemplo. El primero tiene área 15 y perímetro 16. Si la unidad de longitud es el metro, habría que decir con más precisión que el área es 15 m^2 y el perímetro es 16 m. Pero resolveremos el problema operando solo con los números, sin las unidades (más abajo mostramos también cómo se podría tener en cuenta las unidades).

Si un lado mide a y el otro mide b, que el área sea 15 se expresa así:

$$ab = 15 \tag{7.16}$$

El perímetro es la suma de los lados: $a + a + b + b$, o bien, $2a + 2b$. Que el perímetro sea 16 se expresa así:

$$2a + 2b = 16$$

O, equivalentemente:

$$a + b = 8 \tag{7.17}$$

Despejando a de (7.17):

$$a = 8 - b \tag{7.18}$$

Sustituyendo esto en (7.16) resulta:

$$(8 - b)b = 15$$

de donde

$$b^2 - 8b + 15 = 0 \tag{7.19}$$

que es una ecuación cuadrática, cuyas soluciones se calculan como $\frac{8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \cdot 15}}{2}$ y resultan ser $b = 3$ y $b = 5$.

Poniendo $b = 3$ en (7.18) se obtiene $a = 5$. Simétricamente, poniendo $b = 5$ en (7.18) se obtiene $a = 3$.

Es decir, hay un único rectángulo con área 15 y perímetro 16: tiene un lado que mide 3 y otro 5. En realidad no importa cuál de ellos se llama a y cuál se llama b. Es obligatorio hacer la verificación:

$$3 + 3 + 5 + 5 = 16 \quad \text{y} \quad 3 \cdot 5 = 15$$

¿Por qué no tuvimos en cuenta las unidades? Simplemente porque pueden entorpecer los cálculos. Sin embargo, también es cierto que el álgebra permite manejar perfectamente las unidades y que éstas pueden funcionar también como otro mecanismo de control que nos indica si estamos operando bien. Copiamos la resolución anterior mostrando cómo se podría escribir con el metro como unidad de longitud.

Si un lado mide a y el otro mide b, que el área sea 15 se expresa así:

$$ab = 15\text{m}^2 \tag{7.20}$$

El perímetro es la suma de los lados: $a + a + b + b$, o bien, $2a + 2b$. Que el perímetro sea 16 se expresa así:

$$2a + 2b = 16\text{m}$$

O, equivalentemente:

$$a + b = 8\text{m} \tag{7.21}$$

Despejando a de (7.21):

$$a = 8\text{m} - b \tag{7.22}$$

Sustituyendo esto en (7.20) resulta:

$$(8\text{m} - b)b = 15\text{m}$$

de donde

$$b^2 - 8b\text{m} + 15\text{m} = 0 \tag{7.23}$$

que es una ecuación cuadrática, cuyas soluciones se calculan como

$$\begin{aligned}
\frac{8\text{m} \pm \sqrt{(8\text{m})^2 - 4 \cdot 1\text{m} \cdot 15\text{m}}}{2} &= \frac{8\text{m} \pm \sqrt{64\text{m}^2 - 60\text{m}^2}}{2} \\
&= \frac{8\text{m} \pm \sqrt{4\text{m}^2}}{2} \\
&= \frac{8\text{m} \pm \sqrt{4}\sqrt{\text{m}^2}}{2} \\
&= \frac{8\text{m} \pm 2\text{m}}{2}
\end{aligned}$$

y resultan ser $b = 3\text{m}$ y $b = 5\text{m}$.

Trigonometría

★**Ejercicio** 147a), página 48.

De ABC se conocen las medida del ángulo β y del lado BC, que es su opuesto en el triángulo. Una razón trigonométrica que involucra al opuesto de un ángulo es el seno:

$$\text{sen}(\beta) = \frac{\text{opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{|BC|}{|AC|} \Rightarrow |AC| = \frac{|BC|}{\text{sen}(\beta)}$$

Reemplazando por los datos y utilizando la calculadora, obtenemos:

$$|AC| = \frac{5{,}3\text{cm}}{\text{sen}(50°)} \approx 6{,}92\text{cm}$$

Para calcular el lado restante, podemos proceder al menos de dos maneras. La primera es muy parecida: recurriendo a la tangente del ángulo β:

$$\tan(\beta) = \frac{\text{opuesto}}{\text{adyacente}} = \frac{|BC|}{|AB|} \Rightarrow |AB| = \frac{|BC|}{\tan(\beta)}$$

Reemplazando por los datos y utilizando la calculadora, obtenemos:

$$|AB| = \frac{5{,}3\text{cm}}{\tan(50°)} \approx 4{,}45\text{cm}$$

La otra alternativa es aprovechar que ya se conocen dos de los tres lados del triángulo rectángulo ABC y recurrir al teorema de Pitágoras:

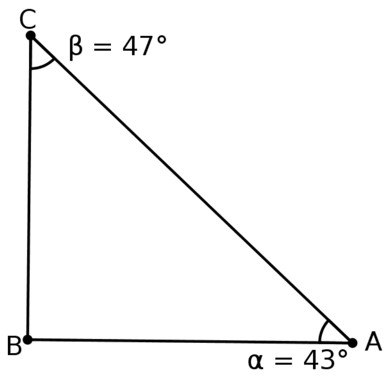
$$|AB|^2 + |BC|^2 = |AC|^2$$

De aquí resulta que $|AB| = \sqrt{|AC|^2 - |BC|^2}$. Reemplazando por los valores y utilizando la calculadora se tiene: $|AB| \approx \sqrt{6{,}92^2 - 5{,}3^2} \approx 4{,}45$.

Observación: El primer procedimiento permitió calcular la medida de AB a partir de los datos originales del problema. La desventaja del segundo procedimiento es que para calcular la medida de AB mediante el teorema de Pitágoras hemos utilizado como dato intermedio el lado AC que acabábamos de calcular. Si ese lado estuviera mal calculado debido a algún error, ese error se habría arrastrado, afectando el posterior cálculo de AB.

★**Ejercicio** 156, página 49.

En la figura se observa el triángulo rectángulo ABC, con un ángulo $BAC = \alpha = 43°$. El ángulo $ACB = \beta$ mide entonces $90 - 43 = 47°$.



Conocer el seno y el coseno del ángulo de $43°$ nos brinda inmediatamente el seno y el coseno del ángulo de $47°$. En efecto:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(\alpha) &= \frac{\text{cateto opuesto de } \alpha}{\text{hipotenusa}} \\ &= \frac{BC}{AC} \\ &= \frac{\text{cateto adyacente de } \beta}{\text{hipotenusa}} \\ &= \cos(\beta)\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\operatorname{sen}(\alpha) = \operatorname{sen}(43°) = 0{,}68 = \cos(47°) = \cos(\beta)$.

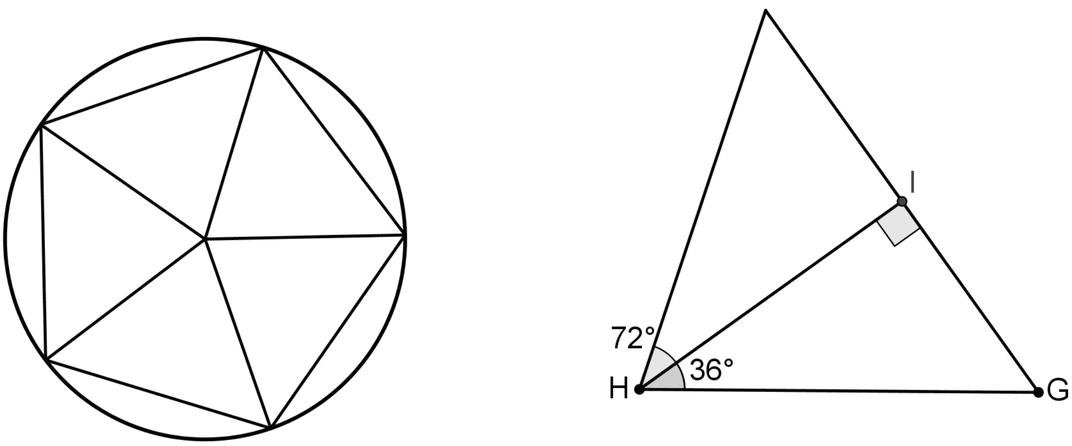
De la misma manera, $\cos(43°) = 0{,}73 = \operatorname{sen}(47°)$.

En general:

$$\operatorname{sen}(\alpha) = \cos(90° - \alpha)$$

★**Ejercicio** 161c), página 50.

Trazando radios de la circunferencia hacia los vértices del pentágono, el mismo queda dividido en cinco triángulos isósceles. La figura muestra esa división, y un detalle de uno de los triángulos.



Como la suma de todos los ángulos centrales debe ser $360°$, cada uno de ellos mide $\frac{360}{5} = 72°$. Esos cinco triángulos isósceles con ángulos de $72°$ se pueden dividir en 10 triángulos como el HIG de la figura: cada uno de ellos es rectángulo, tiene un ángulo de $\frac{72}{2} = 36°$ y una hipotenusa que mide 5 cm, porque es el radio de la circunferencia.

La medida de IG puede calcularse como

$$\operatorname{sen}(36°) = \frac{IG}{HG} \Rightarrow IG = HG \operatorname{sen}(36°) \Rightarrow IG = 5 \operatorname{sen}(36°) \approx 2{,}94 \text{ cm}$$

Por lo tanto, el perímetro del pentágono es de $10 \cdot 2{,}94 = 29{,}4$ cm.

Si tomamos el lado IG como la base de cada uno de los diez triángulos iguales, la altura correspondiente es el segmento HI, cuya longitud se puede calcular como:

$$\cos(36°) = \frac{HI}{HG} \Rightarrow HI = HG\cos(36°) \Rightarrow IG = 5\cos(36°) \approx 4{,}05 \text{ cm}$$

El área del triángulo HIG es entonces $\frac{IG \cdot HI}{2} \approx \frac{2{,}94 \cdot 4{,}05}{2} = 5{,}95$ cm^2

Como hay 10 de esos triángulos, el área total del pentágono es, con las aproximaciones realizadas, $10 \cdot 5{,}95 = 59{,}5$ cm^2

Apéndice B. Bibliografía.

[∗] Los contenidos de este cuadernillo corresponden todos a temas de los programas de la escuela secundaria. Además de la bibliografía que podés consultar en el cuadernillo de problemas, mencionamos:

[1] William G. McCallum, Eric Connally, Deborah Hughes-Hallett, et al, *Algebra: form and function*, JohnWiley & Sons, Inc., Hoboken, N.J., 2009
Aunque la versión que se consigue es en inglés, la mayor parte de la ejercitación está escrita en el lenguaje algebraico, que es internacional. Varios de los ejercicios con enunciado más extenso han sido traducidos y utilizados en este cuadernillo.

[2] `https://es.khanacademy.org/math`
Es un sitio web con mucha ejercitación clasificada por tema, por orden de dificultad, etc. Contiene también explicaciones escritas y en formato de videos que pueden utilizarse para acompañar esta etapa de trabajo.

Índice general

SECRETARÍA ACADÉMICA

MATERIAL DE DISTRIBUCIÓN GRATUITA

ISBN 978-987-3700-48-4

Av. Bartolomé Mitre 1891, Moreno (B1744OHC),
Prov. de Buenos Aires, Argentina
(+54 237) 466-1529/4530/7186
(+54 237) 488-3147/3151/3473
(+54 237) 425-1619/1786
(+54 237) 460-1309
(+54 237) 462-8629
Interno: 3154
unmeditora@unm.edu.ar
http://www.unmeditora.unm.edu.ar

UNM 2010
UNIVERSIDAD DEL
BICENTENARIO
ARGENTINO